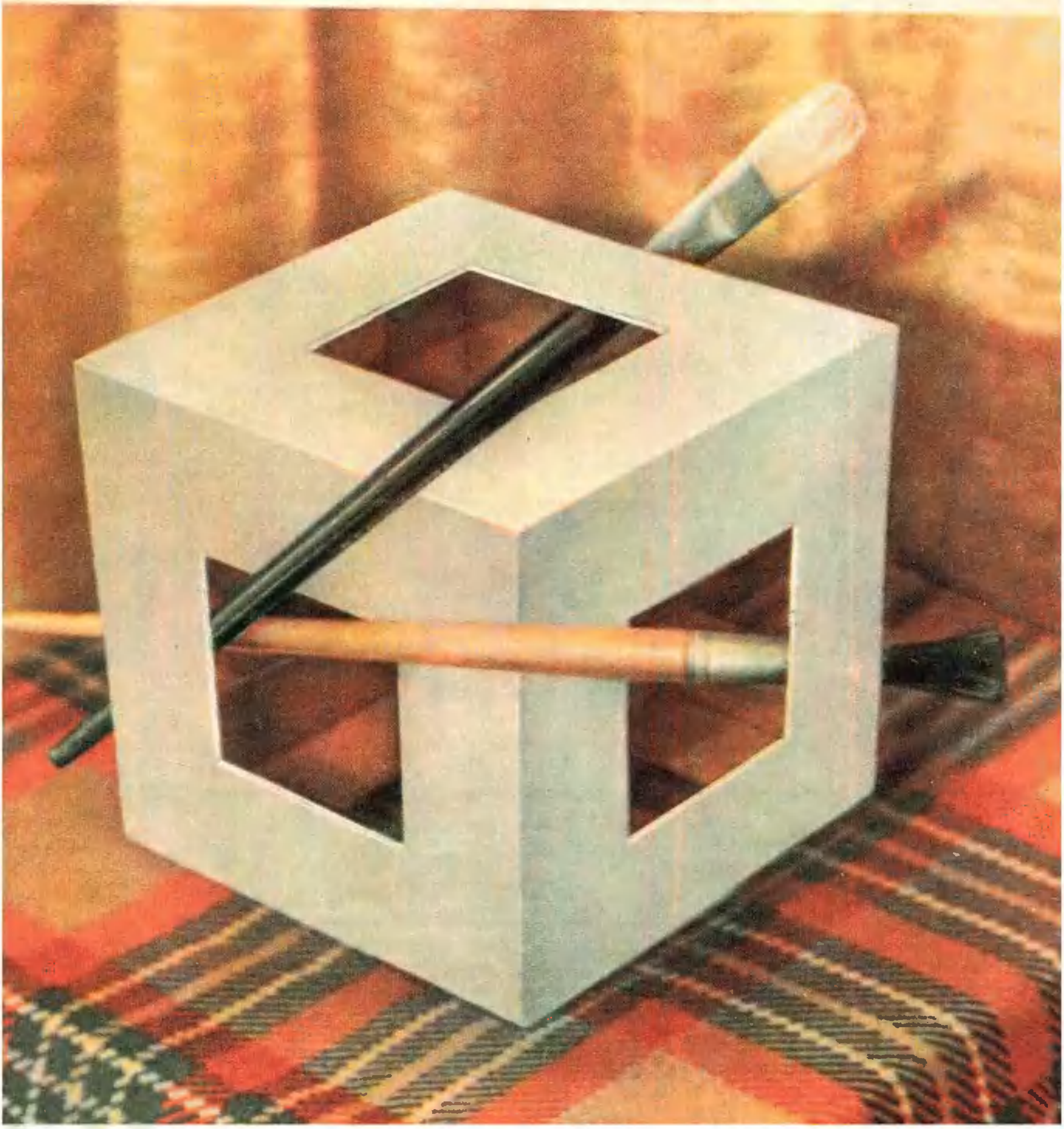
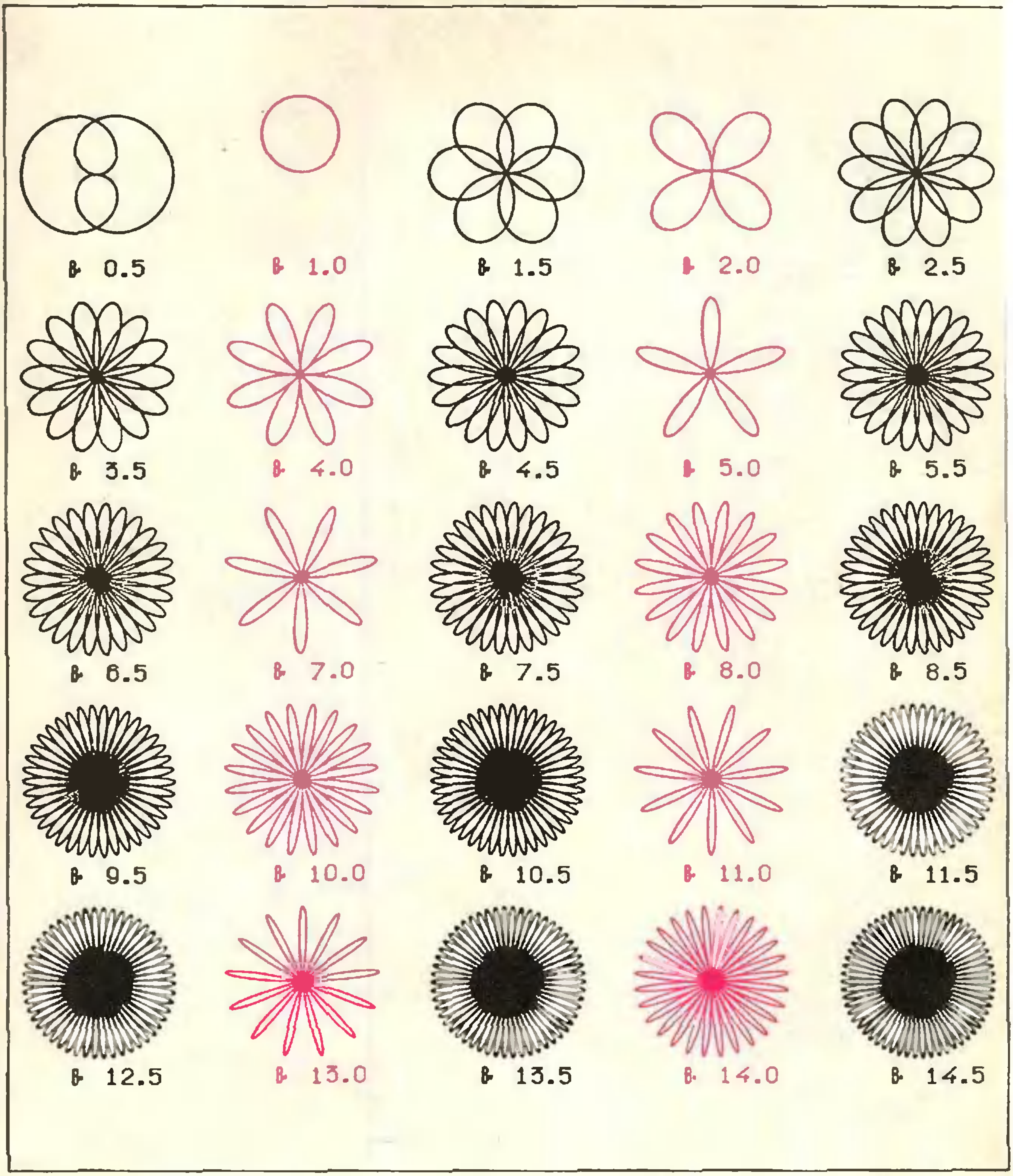
ISSN 0130-2221

Квант

10
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Это семейство «цветочков» нарисовала ЭВМ. Уравнение данного семейства кривых в полярных координатах имеет вид

$$\rho = A \sin \beta\varphi.$$

Подписи под рисунками цветочков указывают значения параметра B (см. также с. 47, задание 10.2).

Основан в 1970 году

Квант

10
1980

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На обложке воспроизведена фотография (без какой-либо ретуши) «невозможного объекта». Подумайте, что и как было сфотографировано

Учиться коммунизму!

Это произошло 2 октября 1920 года. В Москве, в здании, где сейчас находится театр имени Ленинского комсомола, проходил III съезд Российского коммунистического союза молодежи. В нем участвовали 602 делегата со всех концов России. В этот день перед ними выступил Ленин со своей знаменитой речью «Задачи союзов молодежи».

Еще не окончилась Гражданская война. Разруха и голод безраздельно господствовали на всей отвоеванной у врагов территории страны. А Ленин говорил о коммунизме, о том, как строить будущее коммунистическое общество, во имя которого были принесены суровые жертвы.

Не так уж велика по объему эта речь, и все вы ее читали. Но каждый ли из вас, наши дорогие юные читатели, пытался вдуматься в ее содержание, постичь глубину ленинских мыслей? Наверное, есть среди вас и такие, кто «проходил» эту речь, как «проходил» он мимо многих разделов обширного школьного курса. А речь эту надо изучать, причем изучать вдумчиво, неторопливо, неоднократно. Ведь в ней Ленин завещал молодежи свои самые дорогие и светлые мысли — мысли об удивительном и прекрасном обществе, которого до сих пор не знала история человечества.

Ленин ничего не приукрашивал и не замалчивал. Путь к коммунизму труден для любой, даже очень высокоразвитой, страны. И во сто крат тяжелее он для промышленно отсталой, неразвитой страны, большинство населения которой не знает ни азбуки, ни таблицы умножения. А именно такой была Россия в 1920 году.

Строительство коммунизма связано с глубокой качественной перестройкой всего хозяйства и сознания всех членов общества. Изобилие материальных благ, изобилие свободного от работы времени возможны только на основе предельно электрифицированного, комплексного автоматизированного производства, опирающегося на величайшие достижения науки и техники. И управлять таким производством может только всесторонне образованный, гармонически физически и духовно развитый, непрерывно совершенствующий себя человек.

Казалось бы, для России двадцатого года коммунизм — это невероятно далекое будущее. Но Ленин говорил о нем как о самом главном в жизни тех, кто сидел в зале, где проходил съезд. Он говорил о нем как об исторически неизбежной реальности.

Революции не сводятся только к разрушению и уничтожению, они никогда не разрушают все, что было завоевано человечеством в прошлом. Революции уничтожают только то, что к данному моменту времени потеряло право на существование, что мешает обществу двигаться вперед, тормозит его развитие. А уничтожив это, они открывают путь новому, неизмеримо более прогрессивному. Революция — это не только гигантское разрушение, но и еще более гигантское строительство.

В 1920 году многим в России казалось, что, разрушая старый социальный строй, надо вместе с ним выбросить на свалку истории всю прошлую науку, культуру, искусство и образование и вместо них создать небывалую во всех своих частях пролетарскую науку, культуру, искусство, образование. Помните лозунг футуристов: «Сбросим Пушкина, Достоевского, Толстого с парохода современности!»? Но Ленин твердо знал, что будущее рождается из прошлого, и потому после свержения старого социального строя надо проделать гигантскую работу по критическому пересмотру всех прошлых достижений человеческого гения.

Как известно, марксизм объединил в себе все лучшее, что к этому времени было создано в немецкой классической философии, английской политической экономии и французском утопическом социализме. Но для того чтобы выполнить эту гигантскую работу, Маркс должен был глубоко овладеть всеми этими идеями и теориями.

Выдающимся ученым был и Владимир Ильич Ленин. Поэтому он прекрасно понимал, что перед рабочими и крестьянами нашей страны стоит невероятно трудная задача — пересмотреть весь прошлый опыт человечества, отобрать из него все, что по-прежнему является прогрессивным, развить и усовершенствовать все это применительно к новым историческим условиям, новым задачам общества. Нетрудно было бы разрушить до основания старую буржуазную систему образования. А вот, как говорил Ленин, «уметь различать, что было в старой школе плохого и полезного нам, ...уметь выбрать из нее то, что необходимо для коммунизма» — эта задача была намного труднее. Уметь выбрать то, что необходимо для коммунизма в прошлой науке и культуре, искусстве и образовании, могли только те, кто хорошо овладел этой наукой и культурой, изучил это искусство и систему образования. Отсюда и следует главная задача, поставленная Ильичом в его речи,— учиться, учиться и учиться!

Но и учиться можно по-разному. Можно просто накапливать новые знания в своей памяти, превращая ее в подобие энциклопедии. Ленин был яростным противником таких «мертвых знаний», книжной универсальности. Именно в этой речи он произнес знаменитую фразу: «Коммунистом стать можно лишь тогда, когда обогатишь свою память знанием всех тех богатств, которые выработало человечество». Знание всех богатств, то есть основных фундаментальных законов природы и общества, — вот, по Ленину, путь ко всесторонне развитому человеку.

Но и эти богатства не должны лечь мертвым грузом в человеческой памяти. Они должны стать средством повседневной борьбы за построение коммунистического общества. Строить это общество — это значит каждый день, каждый час решать какие-то, пусть небольшие, скромные, но конкретные и полезные задачи. И Ленин приводит примеры таких задач, которые его слушатели должны решать повседневно: учиться самим и учить других — помочь ликвидировать неграмотность; создавать общественные огороды — помочь в борьбе с голодом; организовать в деревне или в своем квартале обеспечение чистоты — помочь в борьбе с эпидемическими заболеваниями. «Союз коммунистической молодежи должен быть ударной группой, которая во всякой работе оказывает свою помощь, проявляет свою инициативу, свой почин». Человек набирается жизненного опыта в практической деятельности. Без борьбы борцом не станешь. Строитель коммунизма — тот, кто строит, а не сидит сложа руки и не ждет, когда все будет сделано без его участия, а он придет на готовое.

В своей замечательной речи Ленин дал четкий ответ на все основные вопросы, стоявшие перед страной и ее молодым поколением: что такое коммунист, как стать коммунистом, чему и как учиться, как создавать коммунистическую мораль, как научиться ставить интересы общества выше своих собственных интересов. Это была законченная программа комсомола на все будущие времена. И все, что в ней содержится, справедливо в наши дни. Конечно, многие конкретные задачи, приведенные Лениным в качестве примеров, уже решены. Но коммунизм еще не построен. И каждый школьник должен стать активным участником этого строительства. А это, как и в прежние годы, означает — глубоко овладевать основами научных знаний, активно участвовать в общественно-полезном труде, каждый день в школе, дома, на улице решать конкретные задачи, связанные с формированием нового человека и строительством нового общества. И сегодня главная задача всей советской молодежи — учиться коммунизму!

И. Кикоин

Абрам Федорович Иоффе

Принимаясь за эту статью, я не имел в виду дать научную биографию выдающегося советского физика Абрама Федоровича Иоффе, 100-летие со дня рождения которого исполняется 30 октября 1980 года. Биография Иоффе хорошо известна и изложена в ряде книг и статей о нем. Я хотел только поделиться с читателями «Кванта» своими личными воспоминаниями об основоположнике советской школы физиков, учеником которого я имел счастье быть.

В 1922 году, когда я учился в выпускном классе средней школы, в одной из центральных газет появилась статья под названием «Физико-механический факультет», подписанная академиком Абрамом Федоровичем Иоффе. Мне в то время было всего 14 лет, жил я в Пскове, плохо понимал, что такое академик, а имя и фамилию автора слышал впервые.

Статью я внимательно прочитал. В ней рассказывалось о недавно созданном факультете в Петроградском политехническом институте. Из статьи было ясно, что этот факультет готовит специалистов, которые в одинаковой степени знают физико-математические науки и инженерные дисциплины. По окончании этого факультета студент получал звание инженера-физика. Меня в то время в равной степени интересовали как физика, так и техника, и я решил во что бы то ни стало поступить на физико-механический факультет.

Из статьи было ясно, что ее автор был создателем и руководителем этого факультета. Мне, конечно, захотелось о нем как можно больше узнать, и я стал искать книги А. Ф. Иоффе. К счастью, мне повезло — я нашел в одном из книжных магазинов только что вышедшую из печати книгу, которая называлась «Лекции по молекулярной физике». Эту книгу я не только прочитал, а стал внимательно изучать. Занятие было чрезвычайно увлекательное, но не очень-то легкое. Дело в том, что в отличие от других курсов физики, которые обычно начинались с описания методов измерения физических величин, этот курс начинался с изложения строения вещества. В увлекательной форме рассказывалось в книге об опытах Резерфорда, доказавших планетарное строение атомов, о движении электронов вокруг ядра атома и многое другое. Все это для нас, школьников, было новым. Дальше, после кратких сведений о законах механики, которые тоже излагались по-новому, автор непосредственно приступал к изложению молекулярной теории материи.

Так я познакомился заочно с академиком Абрамом Федоровичем Иоффе. (Из энциклопедии я, конечно, узнал, что академик — это высшее ученое звание в России.)

Осуществить свое желание поступить на физико-механический факультет я сумел лишь в 1925 году, когда мне исполнилось 17 лет, то есть столько, сколько необходимо было иметь, чтобы стать студентом вуза: моложе 17 лет в институты не принимали.

Когда я стал студентом физико-механического факультета, мне стало ясно, что имя его декана Абрама Федоровича Иоффе было окружено легендами: например, утверждали, что академик сам проверяет данные о каждом поступающем на этот факультет, решает вопрос о приеме, читает лекции студентам, приглашает лучших ученых страны для чтения лекций на факультете и, несмотря на все это, еще руководит научным Физико-техническим рентгеновским институтом (институт был расположен через дорогу от Политехнического института).

К великому моему сожалению, когда у нас начался курс лекции по общей физике, Абрам Федорович был в командировке за рубежом. Первые месяцы моего пребывания в институте, которые мне казались бесконечно долгими, я ни разу не смог увидеть Иоффе, хотя много о нем слышал.

Старшекурсники рассказывали нам о его научных работах, например, таких, как увеличение прочности материалов при ликвидации имеющихся на них микроскопических поверхностных трещин. Рассказывали о работах академика по созданию изоляторов, выдерживающих огромные электрические напряжения.

Такая важная экспериментальная работа, как доказательство существования элементарного заряда — электрона, наряду с Милликеном была проделана А. Ф. Иоффе. Мы были этим очень горды, и нам импонировало, что в книге Милликена «Электрон» мы находили ссылки на работу Иоффе.

Также от старшекурсников мы узнали, что довольно большое число студентов физико-механического факультета уже работает в Физико-техническом рентгеновском институте. Ясно, что каждый из нас мечтал стать сотрудником этого, тогда уже прославленного института.

Ходили слухи, что академик Иоффе дал указание всем преподавателям-физикам, большинство из которых были сотрудниками Физико-технического института, специально присматриваться к студентам и наиболее способных рекомендовать для работы в институт.

Время шло, а я все еще не смог увидеть Абрама Федоровича.

Впервые я увидел его в дни празднования 200-летия Академии наук, поздней осенью 1925 года, когда он у калитки двора Физико-технического института провожал группу ученых, приехавших на празднование юбилея. Это был стройный, высокий человек, с седеющими усами и довольно большой лысиной. Среди гостей резко выделялся человек в чалме, очевидно, индус (позже я узнал, что это был известный индусский физик Раман).

В 1926 году, будучи студентом второго курса, я был рекомендован для работы в Физико-технический рентгеновский институт и попал в лабораторию магнитных явлений, которой руководил Яков Григорьевич Дорфман. С этого времени я видел Абрама Федоровича Иоффе еженедельно по пятницам, так как каждую пятницу, с 5 до 7 часов вечера, в течение многих лет в институте происходило так называемое реферативное собрание. Это было научное собрание под неизменным председательством Абрама Федоровича, на котором сотрудниками института либо докладывались собственные научные работы, либо реферировались наиболее интересные статьи, появившиеся в мировой научной печати. Эти реферативные собрания были мощным средством коллективного воспитания молодых научных сотрудников, как, впрочем, и всех научных работников института. Здесь уместно вспомнить слова академика Николая Николаевича Семенова, который как-то сказал, что основное свое образование в физике он получил не в университете, а на реферативных собраниях Физико-технического института. Действительно, какие бы сложные и трудные вопросы ни разбирались на этих собраниях, они всегда проходили активно, остро, а в конце собрания Абрам Федорович умел так разъяснять любой сложный вопрос, что все оказывалось простым и ясным. Но поначалу нам, молодым сотрудникам, многое оставалось непонятным.

На реферативных собраниях обсуждался весьма широкий круг физических проблем, потому что научная тематика института была весьма разнообразной — она охватывала почти все проблемы современной физики. Так, например, в институте занимались вопросами атомных столкновений, акустикой, физикой магнитных явлений, оптикой, теплотехникой, радиофизикой и радиотехникой, физикой рентгеновских лучей и другими вопросами, включая физику диэлектриков, которая в те времена была основной специальностью Абрама Федоровича Иоффе. Нас всегда удивляла способность Абрама Федоровича до тонкости разбираться в каждой из столь разнородных областей физики. Мы восхищались его талантом рассказывать о самых сложных вещах с необычайной простотой и ясностью.

Вспоминаю один из первых докладов Абрама Федоровича Иоффе для студентов о прочности кристаллов, которая тогда была одной из актуальных проблем физики кристаллов. Сложность проблемы заключалась в том, что довольно строгая физическая теория позволяла рассчитать прочность кристаллов, но опыт показывал, что реальная прочность кристаллов значительно меньше расчетных значений. А. Ф. Иоффе нашел причину расхождения между измеренным на опыте значением прочности кристалла и предсказанным теорией. Причина эта заключалась в том, что на поверхности исследуемого кристалла всегда имеются дефекты в виде микроскопических трещин. При деформации кристалла, например, при его растяжении, на этих трещинах возникают громадные механические напряжения, значительно превышающие внешние напряжения, приложенные к кристаллу как целому. В силу этого именно в тех местах, где имеются микроскопические трещины, и происходит разрыв кристалла при его деформации при внешних напряжениях гораздо меньших, чем расчетные значения предельно допустимых напряжений.

Абрам Федорович Иоффе догадался, что, если поместить кристалл в растворяющую его жидкость, то поверхностный слой с его дефектами будет удален; следовательно, поверхность кристалла станет довольно совершенной, практически без дефектов, и прочность такого кристалла в жидкости должна приближаться к теоретической.

Проще всего было проверить это предположение на кристаллах поваренной соли, хорошо растворимой в воде. Кристалл каменной соли, погруженный в воду, должен быть значительно прочнее кристалла, находящегося в воздухе. Опыты А. Ф. Иоффе блестяще подтвердили эту идею, а само явление упрочнения кристалла в растворителе получило название эффекта Иоффе.

В упомянутом выше докладе Абрам Федорович демонстрировал идею об уменьшении прочности тела под влиянием небольших трещин на его поверхности следующим простейшим опытом. Он брал за концы полоску бумаги и пытался ее растянуть — бумага не разрывалась. Затем он делал маленький надрез поперек полоски, и тогда бумага от ничтожного усилия разрывалась.

Вслед за этим опытом он демонстрировал еще один. В большом стеклянном сосуде с водой находились стеклянные палочки, которые «мокли» в течение нескольких суток. Такие же сухие стеклянные палочки лежали на демонстрационном столе. Иоффе брал палочку из лежащих на столе и изгибал ее. Как и следовало ожидать, палочка тотчас ломалась. После этого он вынимал палочку из сосуда с водой и так же пытался ее изогнуть; при этом ему удавалось согнуть ее в кольцо. Это объяснялось тем, что вода, хотя и в незначительной степени, но растворяет стекло; после длительного пребывания в воде поверхность стеклянных палочек становилась свободной от трещин, и посему они легко сгибались. Так простыми опытами в сравнительно кратком докладе Абрам Федорович донес до своих слушателей сложную проблему теории прочности кристаллов.

В том, что Абрам Федорович обладал необыкновенным талантом находить способы изложения сложных вопросов физики простым и ясным языком, не жертвуя при этом строгостью изложения, я мог лишний раз убедиться, прослушав ряд лекций из общего курса физики, прочитанных им первому курсу нашего факультета, когда я был студентом второго курса. Иоффе не обладал ораторским талантом, но его изложение предмета отличалось необычайной ясностью, сопровождалось блестящими демонстрациями, и трудно было не увлечься физикой в его изложении.

Позже я узнал, что в большинстве передовых стран мира общий курс физики читают крупнейшие ученые. Это понятно, потому что именно в общем курсе физики студентам дается представление обо всей физике в целом, а это способны сделать только выдающиеся ученые, обладающие широким научным кругозором. Таким выдающимся физиком и был Абрам Федорович Иоффе. Наряду с большой научной работой, которую он постоянно вел, Абрам Федорович проявлял повседневную заботу о молодых научных сотрудниках и, естественно, студентах своего факультета.

Я вспоминаю первую экскурсию первокурсников по Физико-техническому институту. Руководил экскурсией сам академик Иоффе. Он водил нас по лабораториям, и мы воочию убедились, насколько интенсивно работали научные сотрудники института. Понятно, что большинство из нас впервые видели настоящую научную лабораторию, впервые видели современное научное оборудование: вакуумные насосы, создающие разрежение до 10^{-6} мм рт. ст. (это были диффузионные насосы, сделанные здесь же в институтской мастерской, которую нам тоже показали); электрометры, с помощью которых измерялись токи порядка 10^{-6} А, текущие через диэлектрики; ртутные лампы для получения ультрафиолетового света; рентгеновские установки... Затаив дыхание, слушали мы объяснения действий всех этих чудес, которые давал нам Абрам Федорович.

Правда, нас несколько смутила некая «неаккуратность» самих физических установок. Нам казалось, что они собраны недостаточно красиво и изящно, но мы не решались делать критические замечания по этому поводу.

Наконец, Абрам Федорович привел нас в лаборатории, где на столах были установки, смонтированные с большей тщательностью, где царил полный порядок. В этих лабораториях мы не встретили ни одной живой души, что немало нас удивило. Абрам Федорович прочел на наших лицах удивление и поспешил разъяснить увиденное немного извиняющимся тоном: «Вы не удивляйтесь чистоте и порядку в этих лабораториях. Дело в том, что здесь сейчас никто не работает — сотрудники находятся в отпуске». После этих слов мы поняли, что при интенсивной научной работе люди больше обращают внимание на существо дела, а не на внешнюю красоту и изящество. Замечу тут же, что в то время непосредственной экспериментальной работой, то есть монтажом установки, сборкой схем, занимались все физики вне зависимости от их ранга, начиная с самого академика Иоффе и кончая только что поступившим в лабораторию студентом. Любой физик-экспериментатор в то время должен был быть мастером на все руки: и механиком, и стеклодувом, и электриком, и плотником.

Само собой разумеется, что после этой экскурсии всем нам казалось почти недосягаемым счастьем попасть в число сотрудников института.

...На всю жизнь запомнился мне 1928 год. В этом году состоялся очередной, шестой по счету, Всесоюзный съезд физиков. Организатором съезда был академик Иоффе.

Обычно участниками съездов были уже зрелые физики, которые должны были вносить денежные взносы, сравнительно значительные, во всяком случае с нашей студенческой точки зрения. Поэтому естественно, что студенты на съезд не попадали, но... Но этот съезд был особенный!

Во-первых, на организацию съезда правительство выделило довольно значительную сумму. Во-вторых, на съезд были приглашены крупнейшие физики мира, и многие из них на приглашение откликнулись. На съезд прибыло 20 иностранных делегатов из Германии, Франции, Англии, США, Голландии, Польши, Чехословакии; среди приехавших были такие всемирно известные физики, как Дебай, Бриллюен, Дирак, Люис, Поль, Борн... Так что этот съезд был практически международным. В-третьих, программа проведения съезда была необычной: съезд откроется в Москве, но основная часть его работы будет происходить на специально зафрахтованном пароходе, который отправится в плавание вниз по Волге от города Нижний Новгород (сейчас г. Горький). Понятно, что среди студентов только и было, что разговоров об этом чудо-съезде. О том, чтобы побывать на нем, мы не смели даже и мечтать.

И что же?...

Вскоре мы с восторгом узнали, что по настоянию Абрама Федоровича Иоффе оргкомитет принял решение пригласить на съезд некоторое количество лучших студентов физико-механического факультета Ленинградского политехнического института и физико-математических факультетов Ленинградского и Московского университетов. В числе приглашенных оказался и автор этих строк.

Съезд был открыт академиком А. Ф. Иоффе в актовом зале Московского государственного университета. За время работы съезда должно было быть прослушано около 160 докладов, из которых большая часть носила экспериментальный характер. Первое общее собрание было посвящено волновой механике. Вступительное слово и доклад о произведенных и возможных экспериментах, доказывающих волновую природу материи, сделал А. Ф. Иоффе.

Мне особенно запомнилось заседание, на котором обсуждалась работа Дейтона Милера, который повторил знаменитый опыт Майкельсона и получил будто бы прямо противоположный результат, что противоречило специальной теории относительности. Нужно сказать, что в те времена еще шли споры о справедливости специальной теории относительности Эйнштейна. Я, да и не только я, а все те, кому сейчас за шестьдесят, прекрасно помним ожесточенные диспуты на эту тему. И среди зарубежных, и среди советских физиков были противники этой теории. Естественно, они ухватились за работу Милера как за еще одно «доказательство» несостоятельности теории относительности. И я хорошо помню выступление Абрама Федоровича Иоффе на заседании, где он, сделав подробный анализ экспериментальной установки Милера, подверг ее уничтожающей критике и доказал несостоятельность выводов, сделанных автором. В дальнейшем Абраму Федоровичу неоднократно приходилось отстаивать справедливость теории относительности Эйнштейна от нападок ее противников.

Но вернемся к съезду физиков. На второй или третий день весь состав съезда, а это было примерно 150 человек, специальным поездом был доставлен в Нижний Новгород. Несколько заседаний было проведено в Нижегородском университете. Затем участники съезда были размещены на пароходе, и началось плавание вниз по Волге. Работа съезда не прекращалась ни на один день. Заседания проходили и на пароходе, и на остановках. В Казани и Саратове заседания состоялись в стенах университетов. И все время мы ощущали, что наш любимый Абрам Федорович Иоффе — душа съезда. Мы видели, каким авторитетом пользовался он не только у своих советских коллег, но и у иностранных физиков.

Во время плавания остановки делались не только по деловым соображениям, но и просто для отдыха в очень живописных местах Волги. Здесь, на отдыхе, мы наблюдали Абрама Федоровича уже в совершенно другой обстановке. Нам было непривычно видеть его, организующего игры на свежем воздухе; например, состязание в беге, в котором он сам принимал участие. Не лишним будет отметить, что Абрам Федорович неплохо бегал и довольно часто побеждал более молодых соперников.

После окончания официальной части съезда состоялась поездка его участников на Кавказ. В первый же день пути в наш студенческий вагон пришли в гости Иоффе, Поль, Дебай и другие не менее прославленные ученые. Как сейчас помню, Абрам Федорович предложил нам игру, заключавшуюся в следующем. Участники игры, расположившись по кругу, начинают по очереди называть имена известных ученых. Первый участник называет одну фамилию, второй называет уже названную фамилию и добавляет еще одну и так далее. Из игры выбывает первым тот, кто забудет хоть одну названную фамилию. Таким образом, число игроков непрерывно уменьшается, пока не остается один победитель, обладающий наилучшей памятью. Среди известных фамилий, конечно, были названы и фамилии участвовавших в игре физиков; самое смешное, что они-то и выбыли из игры одними из первых, так как забывали назвать собственные фамилии.

...1928 год был ознаменован еще одним важным событием — исполнилось 10 лет ЛФТИ (Ленинградскому физико-техническому институту). По этому поводу было организовано торжественное заседание, в котором приняли участие почти все физики Советского Союза. Мы с удовлетворением отмечали, что поздравительные речи и адреса фактически относились лично к Абраму Федоровичу Иоффе. Все, конечно, понимали, что работа Физико-технического института определяется его директором. Среди многочисленных выступлений было и приветствие представителя из Харькова, который в теплых словах благодарил Абрама Федоровича за его усилия по созданию в столице Украины (в то время Харьков был столицей УССР) нового физико-технического института. Ядро этого института составляла группа сотрудников ЛФТИ во главе с Иваном Васильевичем Обреимовым и Александром Ильичом Лейпунским. Это было началом осуществления идеи Абрама Федоровича Иоффе о необходимости создания научных физических центров в крупных промышленных районах Советского Союза.

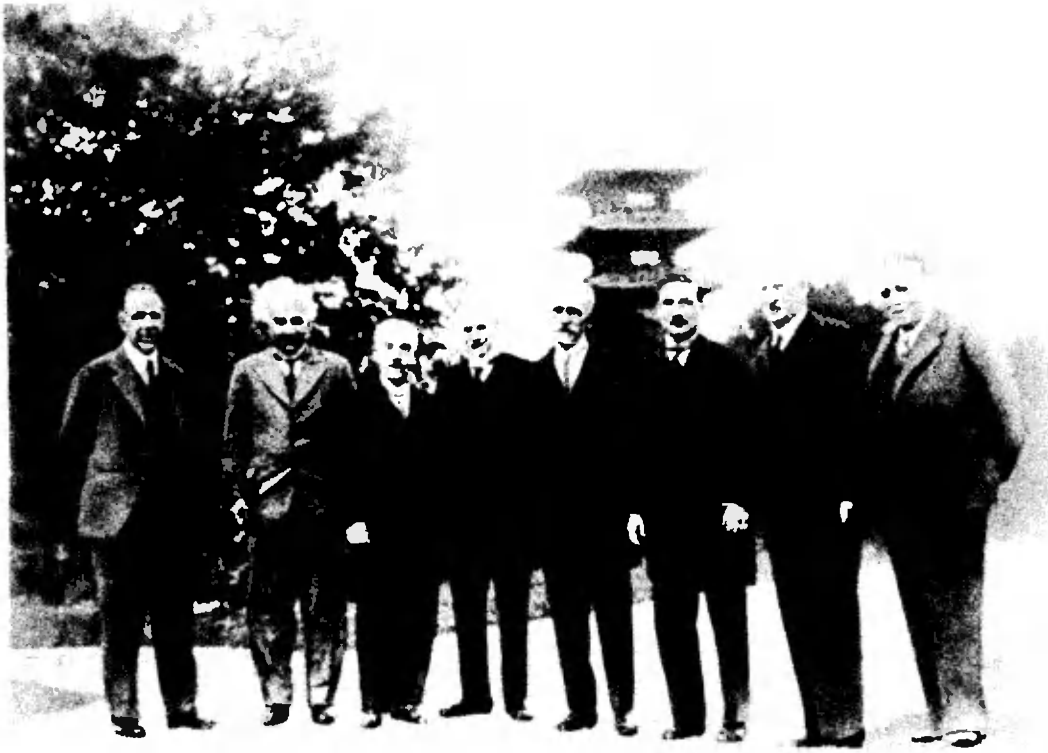
Абрам Федорович неоднократно разъяснял нам необходимость децентрализации науки в СССР. «Нельзя,— говорил он,— чтобы наука сосредоточилась в Москве и Ленинграде. Советская физика обязана оказывать свое влияние на развитие промышленности страны». Вслед за Украинским физико-техническим институтом (УФТИ) были организованы физические институты в Днепропетровске, Томске и Свердловске. Во все эти институты были направлены группы высококвалифицированных физиков из числа сотрудников ЛФТИ — учеников Иоффе.

В адресе, который преподнесли Абраму Федоровичу сотрудники ЛФТИ, было отмечено, что адрес этот подписывает не только огромное количество его прямых учеников, но и ученики учеников его первых учеников, которые сумели к этому времени стать неплохими физиками. Это было сказано не для красного словца, а отражало фактическое положение дела. Забегая вперед, могу сказать, что еще при жизни Абрама Федоровича Иоффе в числе его учеников насчитывалось не менее 15 академиков и около 30 членов-корреспондентов Академии наук СССР. Не знаю, найдется ли еще кто-либо из ученых мира, способный похвастаться лучшими результатами в своей стране.

Абрам Федорович действительно был не только выдающийся ученый, но и превосходный воспитатель молодежи. Это объясняется, в первую очередь, тем, что он владел секретом отбирать талантливых молодых сотрудников, которые сравнительно быстро становились крупными учеными. Помимо этого, Абрам Федорович сумел создать в институте такую рабочую атмосферу, в которой каждый сотрудник ощущал себя сопричастным к огромному, важному делу, сознавал нужность своей работы, чувствовал за нее ответственность. Люди работали увлеченно, не жалея сил. В институте можно было в любое время дня и ночи найти сотрудников за работой. И это было нормальным стилем работы института.

Наше увлечение экспериментальной работой было столь велико, что Абрам Федорович нередко журил нас за то, что мы слишком много времени проводим за экспериментом и слишком мало времени уделяем чтению научной литературы. Он даже поручил своему большому другу начальнику отдела теоретической физики института Якову Ильичу Френкелю организовать специально для экспериментаторов семинар по вопросам современной теоретической физики.

Но вернемся к празднованию 10-летия института. Абрам Федорович очень любил и высоко ценил хорошую, остроумную шутку. Вот почему по окончании торжественного заседания мы устроили то, что теперь называется капустником. Точнее, это была пьеса, написанная нами специально к юбилею и называвшаяся «10 лет, которые потрясли физику». Репетировали эту пьесу мы втайне, так что о ней знали лишь ее участники. Пьеса состояла из 10 актов, последовательно отражающих каждый год из жизни института со дня его создания. Нам, участникам, очень хотелось знать, как она будет воспринята зрителями, и поэтому мы внимательно следили за реакцией зала и прежде всего — за реакцией Абрама Федоровича Иоффе, который сидел в первом ряду. Пьеса имела большой успех: зрители, в том числе и Абрам Федорович, почти непрерывно смеялись и награждали актеров бурными аплодисментами.



Комитет Сольвеевского конгресса (слева направо): Н. Бор, А. Эйнштейн, Т. де Дондер, О. Ричардсон, П. Ланжевен, П. Дебай, А. Ф. Иоффе, Б. Кабрера. 1931 год.

В пьесе действительно было много смешных и остроумных моментов. Так, например, два ведомства, которые финансировали наш институт, были изображены в виде царей, восседавших на тронах с надписями «Царь-Наркомпрос» и «Царь-Совнарком». Для пущей важности они были одеты в докторские мантии самого Абрама Федоровича. Актеры, изображавшие дирекцию института, всячески старались угодить владыкам, показывая различные фокусы, вроде превращения воды в кровь, жезла в змею и т. д. За свое усердие они удостоились вознаграждения — получили мешок с монетами. Кончалась пьеса куплетами, которые исполняли актеры, сидящие в ракете, направляющейся в космос на заседание ученого совета. Каждый куплет кончался припевом

«Все выше, и выше, и выше
Летим на ракете в эфир.
Заполним мы физикой скоро
Весь звездный заоблачный мир».

Окрыленные успехом этой пьесы, мы ввели в традицию устройство такого рода вечеров два раза в году: на майские и октябрьские праздники. И неизменно они пользовались успехом у коллектива института. В пьесах часто принимал участие и сам Абрам Федорович Иоффе.

Вспоминаю один из таких вечеров, на котором обыгрывалось одно довольно значительное событие в жизни советских научных работников. Я имею в виду вышедшее в 1933 году постановление о введении ученых степеней и званий. Нам, молодым научным сотрудникам, оно казалось противоречащим духу строительства социализма, поскольку постановление предусматривало материальные преимущества за научную степень или звание, а не за непосредственно выполняемую работу.

На сцене представлялось заседание ученого совета института под председательством академика Иоффе, которого играл... Абрам Федорович Иоффе. Появление его на сцене было с восторгом воспринято зрителями. Ученый совет заслушивал защиты двух диссертаций. Первая диссертация была экспериментальной и, конечно, сопровождалась демонстрацией остроумных шуточных опытов. Достаточно сказать, что объектом исследования являлась α-брынза, электродами служили столовые вилки. Образец с воткнутыми в него электродами помещался между полюсами настоящего электромагнита; на полюсы были надеты детские ботиночки (в те времена полюсные наконечники электромагнитов называли полюсными башмаками). Результаты исследования диссертант проиллюстрировал графиком, на котором была изображена замысловатая кривая, проходящая через две экспериментальные точки. Комментируя этот график, диссертант заявил, что он построил его на основании известной физической теоремы о том, что через две данные экспериментальные точки можно провести кривую и притом только одну. В заключение он заявил, что исследованная им α-брынза обладает дырочной проводимостью; в доказательство справедливости этого вывода на экране появилось изображение брынзы, на котором, естественно, были видны дырки. Ясно, что защита диссертации проходила под смех и аплодисменты зрителей.

Вторая защита была чисто теоретической. Эта инсценировка была пародией на одного теоретика нашего института, любившего похвастаться своими успехами. После того как председательствующий предоставил слово второму диссертанту, тот развернул плакат, на котором было написано «Список ученых, которые цитируют меня» и дальше шло перечисление имен: Архимед, Лукреций, Галилей, Эйнштейн, Бор... Затем диссертант продемонстрировал второй плакат — «Список лиц, которые могут засвидетельствовать, что я первый сказал А». В списке значились фамилии вахтера, коменданта здания института, пожарника, уборщицы и других служащих института.

После «защиты» и краткого совещания членов ученого совета председательствующий Абрам Федорович серьезным тоном объявил, что совет присуждает обоим диссертантам ученые степени, пригласил их подойти к столу, опуститься на одно колено и надел на каждого докторские мантии. Все это сопровождалось бурными аплодисментами зала.

...С начала 30-х годов А. Ф. Иоффе заинтересовался физикой полупроводников. Я думаю, что какая-то интуиция подсказала Абраму Федоровичу, что полупроводники, которые были очень мало исследованы в то время, могут иметь важное техническое применение. Скудность экспериментальных данных о полупроводниках объяснялась тем, что у одного и того же по химическому составу полупроводника электрические свойства, например электропроводность, в широких пределах менялись от образца к образцу, и поэтому физики-экспериментаторы, отчаявшись получить однозначные данные, махнули рукой на полупроводники.

Абрам Федорович настолько заинтересовался этим классом веществ, что переключил на их исследование значительную часть сотрудников института. Разумеется, это делалось не в административном порядке. Абрам Федорович всегда умел внушать сотрудникам интерес, а следовательно, и энтузиазм к исследованию новых областей физики.

Уже первые полученные данные показали, что наблюдавшийся на опыте большой разброс данных об электрических свойствах полупроводников одного и того же химического состава объясняется ничтожными, с химической точки зрения, примесями. Поэтому Абрам Федорович и сосредоточил особое внимание на исследовании влияния малых количеств примесей на электрические свойства полупроводников. Заметим, что под термином «малые примеси» понимаются стотысячные и даже миллионные доли процентов по отношению к основному веществу, которые обычным химическим анализом не обнаруживаются.

Под руководством Абрама Федоровича Иоффе были разработаны

А. Ф. Иоффе за рабочим столом.

тончайшие физические способы регулирования количества примесей в некоторых типах полупроводников. Это позволило исследовать зависимость электропроводности полупроводника от количества введенных примесей. Я думаю, что в значительной степени именно под влиянием работ А. Ф. Иоффе и его школы началось быстрое развитие исследований в области физики полупроводников во многих странах мира.

Среди вопросов этой области физики Абрама Федоровича заинтересовала проблема выпрямления переменного тока. Было обнаружено, что контакт металла с полупроводником обладает выпрямляющими свойствами. При прохождении тока через такой контакт электрическое сопротивление существенно зависит от направления тока. Если при одном направлении тока сопротивление мало, то при обратном направлении тока оно резко возрастает. Таким образом, полупроводник с нанесенным на его поверхность слоем металла представляет собой выпрямитель, столь нужный для многих технических целей. Довольно скоро после проведенных в ЛФТИ исследований на «модных» в 30-х годах полупроводниках из закиси меди (Cu_2O) и селена (Se) в промышленности стали использоваться медиозакисные и селеновые выпрямители.

Абрам Федорович пытался найти физическое объяснение эффекту на границе металл — полупроводник. Совместно с Яковом Ильичом Френкелем он опубликовал теорию этого явления. Хотя количественные предсказания теории не совпадали с экспериментальными данными, ее физические основы в значительной степени сохранились и сейчас.

Абрам Федорович продолжал и даже расширял исследования в области полупроводников. В частности, его заинтересовали фотоэлектрические явления в полупроводниках. Это, в первую очередь, изменение электропроводности полупроводников под действием падающего на них света. Во-вторых, возникновение электродвижущей силы при освещении контакта металл — полупроводник или контакта двух полупроводников. Возникновение ЭДС под действием света — это прямое превращение световой энергии в электрическую. Понятно, какое большое значение могло бы это иметь для практики, если в качестве источника света использовать даровую энергию Солнца. Абрам Федорович довольно часто описывал нам радужные перспективы использования полупроводников в качестве генераторов электроэнергии, работающих на энергии излучения Солнца. Нам это казалось чистой фантастикой. Коэффициент полезного действия полупроводниковых фотоэлементов того времени не превышал 1—2%. Абрам Федорович нас убеждал, что в дальнейшем удастся повысить КПД полупроводниковых фотоэлементов до 10—15%, а это, напоминал он, вдвое выше, чем КПД паровоза.

Только теперь мы можем оценить необыкновенную прозорливость Абрама Федоровича. Начиная с 60-х годов, полупроводниковые фотоэлементы — их называют фотодиодами — широко применяются на практике. Их КПД достигает 10—15%. Наиболее широко используются солнечные фотодиоды на космических кораблях в качестве источников электропитания. Больше того, сейчас уже разрабатываются проекты силовых электростанций на солнечных фотодиодах. Таким образом, казавшаяся нам фантастической идея Иоффе на наших глазах превратилась в реальность.

Абрам Федорович вообще часто высказывал научные идеи, которые большинству физиков в то время казались фантастическими, а впоследствии получали свое реальное воплощение. Я помню, как в начале 30-х годов на одном из ученых советов Абрам Федорович намечал перспективы развития научных исследований в институте. При этом он высказал убеждение, что в институте следует развить работы в области ядерной физики. В обоснование этого предложения он утверждал, что в будущем представится возможность практически использовать энергию, выделяющуюся при ядерных превращениях. Тогда подобные прогнозы были восприняты как совершенно нереальные, потому что у многих еще было свежо в памяти высказывание основоположника ядерной физики Резерфорда о том, что атомное ядро есть не источник энергии, а могила для энергии.

В конце 1938 года, когда было открыто явление деления урана, всем стало ясно, что прав был А. Ф. Иоффе, а не Резерфорд. К счастью, еще при жизни Абрама Федоровича ядерная энергия была использована не только как орудие уничтожения, но и для мирных целей. Первая в мире атомная электростанция была пущена в Советском Союзе в 1954 году, за год до 75-летия А. Ф. Иоффе. Замечу, что Абрам Федорович никогда не хвастался своими осуществившимися предсказаниями, которые звучали почти как пророчества.

Тут уместно сказать, что в решении и проблемы создания ядерного оружия, и проблемы использования ядерной энергии в мирных целях руководящая роль принадлежала ученикам Абрама Федоровича Иоффе. Это на первый взгляд кажется странным, потому что до начала 30-х годов, то есть в первые 12—15 лет существования ЛФТИ, почти никто в институте (за исключением Д. В. Скобельцына) ядерной физикой не занимался. Но в самом начале 30-х годов, в период наиболее бурного развития физики ядра (открытие нейтрона, позитрона и т. д.), Абрам Федорович понял, что его институт, его сотрудники не могут остаться в стороне от решения животрепещущих проблем этой области. Я помню, как он со свойственными ему настойчивостью и тактом убеждал ряд ведущих физиков института круто изменить свою научную тематику и перейти на исследование мало знакомой области науки. Агитация имела успех, и довольно скоро две лаборатории института, которыми руководили Игорь Васильевич Курчатов и Абрам

Исаакович Алиханов, целиком перешли на новую тематику. По инициативе Абрама Федоровича в институте был организован специальный семинар, на котором обсуждались новые работы по физике атомного ядра, публикуемые во всех физических журналах мира, и намечались планы исследований в институте. Этот семинар помог нашим «ядерщикам», как мы их тогда называли, быстро войти в курс новой для института области физики с ее понятиями, терминологией, методами экспериментальных исследований. И нужно сказать, что довольно скоро новые лаборатории стали выпускать свою научную продукцию.

Уже к середине 30-х годов наши физики-ядерщики находились на уровне лабораторий Запада. Это подтвердила Всесоюзная конференция по ядерной физике, которая происходила в Ленинграде и практически была международной, поскольку в ней приняли участие многие иностранные ученые. На этой конференции с докладами выступали такие крупные, я бы сказал ведущие, ученые в области ядерной физики, как Жолио-Кюри, Дирак, Перрен. Доклады наших советских физиков — сотрудников ЛФТИ — показали, что достигнутый ими уровень был весьма высок.

И. В. Курчатов и А. Ф. Иоффе.

...В 1933 году ЛФТИ отмечал свое пятнадцатилетие. Мы подготовили к этому юбилею, кроме официальной программы, шуточное представление. Оно начиналось комическим торжественным заседанием ученого совета института. С докладом на заседании выступал Абрам Федорович Иоффе. Он начал свое выступление словами: «Товарищи, я хочу вам рассказать о 15-дневной деятельности нашего института.» Когда его из публики поправили «15-летней», Абрам Федорович повторил, что он делает доклад именно о 15-дневной деятельности, потому что за последние 15 дней сотрудники института провели такую работу по подготовке к празднованию юбилея, которая, с его точки зрения, сравнима по масштабу с их 15-летней научной деятельностью. Естественно, доклад неоднократно прерывался смехом зала и аплодисментами. После доклада ряду сотрудников были вручены премии, каждая из которых сопровождалась остроумными комментариями. Затем ученый секретарь совета огласил ряд приветствий юбиляру. Среди них была, например, телеграмма от Бойля — Мариотта: «Связи юбилеем вашего института сообщаем открытом нами законе $pV = \mathrm{const}$ тчк надеемся вы его успехом примените вашей научной работе тчк Бойль — Мариотт тчк кладбище Пер Ляшез тчк 1776 год». Было и поздравление от Остапа Бендера из Рио-де-Жанейро: «Освещаем город фотоэлементами тчк шлите миллион ваших фотоэлементов».

Заканчивалась наша увеселительная программа пьесой под названием «Дела ядерные» в исполнении кукольного театра под руководством замечательного артиста Евгения Деммени. Героями пьесы были, конечно, сотрудники института, в том числе и Абрам Федорович Иоффе.

Куклы были сделаны кукольником, которого мы заранее специально приглашали на заседание ученого совета нашего института, где он и сделал наброски будущих персонажей. Разумеется, кроме организаторов, никто не знал о существовании пьесы.

Когда зал был полон и зрители сидели на своих местах в ожидании начала представления, неожиданно погас свет. Это было объяснено случайной неисправностью в сети. В действительности свет мы погасили специально для того, чтобы в темноте установить на сцене ширму для кукольников. Делалось все это очень быстро, и вскоре вспыхнул луч прожектора, который ярко осветил чуть шаржированное кукольное изображение Абрама Федоровича Иоффе. Читатели могут себе представить бурю оваций, которой была встречена эта столь неожиданная сцена. Такая встреча была предусмотрена режиссурой, и поэтому на кафедре был поставлен довольно большой колокольчик, который кукла взяла в руки и начала успокаивать публику в зале, что, естественно, вызвало еще большую овацию.

Пьеса имела успех и надолго запомнилась всем присутствовавшим в зале, особенно, наверное, женам главных действующих лиц, которым сразу же после окончания спектакля были розданы герои-куклы.

В 1936 году я уехал из Ленинграда в Свердловск, и повседневная связь с Абрамом Федоровичем была на некоторое время прервана.

В октябре 1940 года советские физики отмечали 60-летие Абрама Федоровича Иоффе. Автор этих строк явился на юбилей в качестве представителя уральских физиков. В преподнесенном нами адресе было сказано: «Вы, Абрам Федорович, являете собой второй после Ньютона пример использования продуктов питания для научных исследований». Имелись в виду легендарное яблоко Ньютона и поваренная соль, кристаллы которой часто использовал Абрам Федорович в своих исследованиях по физике кристаллов.

...С начала войны ЛФТИ под руководством Иоффе практически целиком переключился на работы, связанные с обороной нашей страны. К счастью, к этому времени в лабораториях института уже были решены многие важные вопросы оборонного значения, такие, например, как защита кораблей от магнитных мин (руководил этой работой Анатолий Петрович Александров, ныне президент Академии наук СССР), проблема радиолокации (Юрий Борисович Кобзарев) и другие.

На время войны значительная часть ЛФТИ во главе с Абрамом Федоровичем была эвакуирована в Казань. Часть сотрудников находилась непосредственно на флотах, занимаясь установкой систем магнитной защиты военных кораблей, часть осталась в Ленинграде (во главе с Павлом Павловичем Кобеко), где совместно с ленинградскими морскими организациями провела большую работу, связанную с доставкой грузов в осажденный Ленинград по льду Ладожского озера.

В 1942 году мы встретились с Абрамом Федоровичем в Свердловске во время состоявшейся там сессии Академии наук СССР. Абрам Федорович был полон сил и энергии и очень гордился вкладом своих учеников в военную мощь нашей армии. Не могу не отметить, что в начале 1943 года часть сотрудников ЛФТИ, так же как и бывшие его сотрудники, по рекомендации Абрама Федоровича Иоффе переключились на решение так называемой урановой проблемы.

Во время войны Абрам Федорович был вице-президентом Академии наук СССР и, находясь на этом посту, сумел направить работу значительной части физиков на решение актуальнейших для обороны страны проблем. Более детально я познакомился с деятельностью Абрама Федоровича Иоффе в Академии наук после моего избрания членом-корреспондентом, когда я был обязан посещать общие собрания Академии и все заседания отделения физико-математических наук.

Вспоминаю одно из заседаний отделения вскоре после окончания войны, посвященное чисто организационному вопросу — выдвижению и обсуждению кандидатуры президента Академии наук СССР. Дело в том, что до 1946 года президентом был академик Владимир Леонтьевич Комаров, но состояние его здоровья и возраст не позволяли ему эффективно руководить деятельностью этого важного учреждения. Советское правительство пригласило весь состав Президиума АН СССР на совещание, на котором обсуждался вопрос об избрании нового президента. На этом совещании была предложена кандидатура Сергея Ивановича Вавилова.

Сразу же были собраны отделения Академии наук СССР. На заседании отделения физико-математических наук его академик-секретарь Абрам Федорович Иоффе доложил рекомендацию правительства и попросил членов отделения высказаться по этому вопросу. После нескольких выступлений слово попросил один из старейших членов отделения академик Алексей Николаевич Крылов. Он сказал, что перед заседанием отделения, зная повестку дня, специально просмотрел устав Академии наук, чтобы выяснить, какие требования предъявляются к президенту Академии наук. Оказалось, что в действовавшем тогда уставе слова «президент Академии наук» упоминаются всего лишь один раз, а именно: «Президент Академии наук избирается общим собранием действительных членов Академии наук». Поэтому ему лично трудно обсуждать вопрос о кандидатуре президента, поскольку неизвестно, какие требования надо к нему предъявить. В качестве примера образцового устава Крылов сослался на судебный устав Петра I, процитировав следующие пункты:

«1. Кражей называется хищение чужой собственности, произведенное тайно.

2. Грабежом называется хищение чужой собственности, произведенное явно.

3. Разбоем называется хищение чужой собственности, произведенное с насилием».

Закончив эту цитату, академик Крылов сказал: «Как видите, в судебном уставе все сформулировано совершенно четко и ясно, а что такое президент Академии наук — совершенно не ясно». Последняя фраза, конечно, вызвала смех собравшихся. Абрам Федорович Иоффе не растерялся и ответил Крылову примерно так: «Я понимаю, что в действующем уставе Академии наук имеется пробел, но, по-видимому, составитель устава предполагал, что президент не будет заниматься ни кражей, ни грабежом, ни разбоем». Эти слова были встречены аплодисментами. Отделение вынесло решение рекомендовать общему собранию Академии наук кандидатуру академика С. И. Вавилова на пост президента. Вскоре он был избран президентом Академии наук СССР.

...Нельзя сказать, что жизненный путь Абрама Федоровича был усыпан розами. Я был свидетелем нескольких важных событий, которые, безусловно, сильно огорчили Абрама Федоровича Иоффе. Одним из таких событий была неудача с решением проблемы тонкослойной изоляции, на которую Абрам Федорович потратил много сил и времени. Это была чисто научная неудача. Он ее мужественно перенес и признал в печати ошибочность своих предпосылок.

В 1936 году в Москве состоялось общее собрание Академии наук, посвященное обсуждению научной деятельности ЛФТИ, возглавляемого Абрамом Федоровичем Иоффе. На этом собрании Абрам Федорович сделал соответствующий доклад. Физики, участвовавшие в обсуждении доклада, подвергли резкой критике деятельность института и самого Абрама Федоровича Иоффе.

Я думаю, что Абрам Федорович был очень огорчен необъективностью выступавших, среди которых были и его ученики. Все выступления звучали очень тенденциозно. Тем участникам собрания, которые могли выступить с объективной положительной оценкой деятельности института, слова не давали (в числе таковых оказался и автор этих строк).

Время показало, насколько несправедливой была эта критика.

В частности, Абрама Федоровича критиковали за то, что он развил в институте исследования по ядерной физике, которые, по утверждению выступавших, не сулили даже в далеком будущем практических применений. По тем же соображениям критиковали его и за развитие работ в области физики полупроводников. Теперь всем ясно, насколько ошибались критики Абрама Федоровича, насколько смехотворна была их аргументация. Нынешнее поколение должно воздать должное научной прозорливости Абрама Федоровича Иоффе, которая позволила ему своевременно сформулировать и поставить такие актуальные проблемы, как физика атомного ядра и физика полупроводников — основы современной научно-технической революции.

Нелегким был для Абрама Федоровича уход в 1950 году с поста директора ЛФТИ, который он основал и которым руководил более 30 лет. Тем более, что этот уход был обставлен довольно бестактно. Незадолго до этого события мы отмечали семидесятилетие Абрама Федоровича. Торжественное заседание происходило в актовом зале Академии наук СССР в Ленинграде и организовано было нарочито скромно. Из сотен приветствий и адресов, направленных юбиляру со всех концов страны и из-за рубежа, было зачитано только три: от Президиума Академии наук СССР, от сотрудников института и райкома партии. Само заседание ограничилось научным докладом Абрама Федоровича Иоффе «О проблемах полупроводников».

Вечером Абрам Федорович пригласил к себе домой наиболее близких своих учеников. За ужином Абрам Федорович говорил нам, что он, несмотря ни на что и даже на свой возраст, не оглядывается на прошлое и с оптимизмом смотрит в будущее. Он показывал нам почетные дипломы, присужденные ему различными организациями, в том числе и зарубежными научными учреждениями и университетами. Среди них был диплом Почетного члена Английского физического общества (1944 г.), Парижского университета (Сорбонна, 1946 г.), Бухарестского университета (1947 г.), университета Граце (Австрия, 1949 г.) и т. д.

Особенно мне понравился диплом Почетного члена Китайского общества физиков (1949 г.), оформленный в виде свитка из белой шелковой широкой ленты, на которой иероглифами был написан текст диплома (конечно, с приложенным к нему русским переводом).

Сказанное Абрамом Федоровичем о том, что он с надеждой и оптимизмом смотрит в будущее, было не «красным словцом». Действительно, вскоре после ухода с поста директора ЛФТИ он со свойственной ему энергией принялся за организацию Института полупроводников Академии наук СССР. В этом ему оказал большое содействие Президиум Академии наук и ее президент Сергей Иванович Вавилов. Таким образом, научная работа Абрама Федоровича Иоффе ни на один день не прерывалась.

В 1955 году, в предверии 75-летия Абрама Федоровича Иоффе, группа академиков-физиков, его учеников, направила письмо в правительство с просьбой присвоить А. Ф. Иоффе звание Героя Социалистического Труда. В обоснование своей просьбы мы перечислили крупнейшие научные заслуги Абрама Федоровича и особо отметили его исключительную роль в деле подготовки научных кадров высшей квалификации, обеспечивших быстрое и своевременное решение урановой проблемы. В частности, мы указали, что среди учеников Абрама Федоровича уже насчитывается 15 академиков и около 30 членов-корреспондентов Академии наук СССР.

Для проведения юбилея Академия создала оргкомитет, и я был удостоен чести стать его председателем. Естественно, меня как председателя очень волновал вопрос о реакции правительства на упомянутое письмо с просьбой о награждении Абрама Федоровича Иоффе. До последней минуты мы не знали, как решится этот вопрос, и лишь в вагоне поезда, везшего нас в Ленинград на празднование юбилея, мы услыша-

А. Ф. Иоффе на отдыхе.

ли по радио указ Президиума Верховного Совета СССР о присвоении академику А. Ф. Иоффе звания Героя Социалистического Труда. Радость моя была безмерна.

На сей раз торжественное заседание, происходившее в том же актовом зале Академии наук СССР в Ленинграде, прошло с большим подъемом. Число прибывших на чествование Абрама Федоровича было столь велико, что мы, при всем желании, не могли всем предоставить слово для приветствия.

Последние годы мы с Абрамом Федоровичем встречались сравнительно редко, но несколько раз все же он побывал у нас дома в Москве. Абрам Федорович очень много и интересно рассказывал не только о своих новых научных планах и идеях, но и о различных событиях из своей жизни. Например, он

рассказал такую забавную историю. Однажды, в бытность свою в Голландии, Абрам Федорович был в гостях у крупного физика Пауля Эренфеста; там же были Нильс Бор и Паули. Абрам Федорович, Эренфест и Бор сидели на диване, а Паули, по своей привычке, расхаживал по комнате из угла в угол и что-то рассказывал. Вдруг Бор произнес: «Перестань разгуливать! Это меня раздражает». Паули спросил: «А что, собственно, тебя раздражает?» Бор, отличавшийся манерой точно формулировать свои мысли, задумался. И тут Эренфест ответил: «Раздражает момент, когда ты возвращаешься обратно».

Вспоминаю и другую рассказанную Абрамом Федоровичем историю, случившуюся с ним в молодости, когда он работал в Мюнхене. Однажды Абрам Федорович решил провести воскресный день в Альпах. Накануне вечером он сел в поезд. Его соседками по купе оказались две дамы. Попутчики разговорились. Узнав, что Абрам Федорович — физик, дамы спросили его, какая завтра будет погода. Абрам Федорович начал им объяснять, что он не метеоролог и поэтому предсказать погоду не может. Дамы, однако, оказались настойчивыми и требовали ответа, утверждая, что физики должны все знать. Дело происходило в июне, было жарко, и Абрам Федорович, шутя, ответил: «Завтра будет снег». Дамы весело рассмеялись и перешли к другой теме. Велико же было удивление Абрама Федоровича, когда, проснувшись наутро в гостинице, он увидел за окном... густо падающий снег.

...Последний раз я видел Абрама Федоровича Иоффе летом 1960 года, когда я был вместе со своей старшей дочерью в Ленинграде. Мы с ней получили приглашение провести воскресный день у него на даче в Комарове. Абрам Федорович прислал за нами машину. На даче Абрам Федорович и его жена Анна Васильевна водили нас по своему хозяйству, с гордостью показывали возделанные ими грядки с клубникой и овощами. Памятуя, что Абрам Федорович — директор основанного им агрофизического института, я спросил Абрама Федоровича, возделывал ли он грядки по всем правилам агрофизической науки. На это он, смеясь, ответил, что в основном следовал дедовским методам обработки почвы. Потом он повел нас на вышку, построенную специально для того, чтобы можно было любоваться видом на море. Абрам Федорович говорил, что он очень любит отдыхать на этой вышке.

Вернулись мы в гостиницу только поздно вечером. Было совершенно светло — в Ленинграде был разгар белых ночей.

Беседуя на даче с Абрамом Федоровичем, я, конечно, не рассказал ему, что мы, как и все физики страны, готовились отметить этой осенью его 80-летие. Не рассказал я ему и о том, что мною отправлена статья в журнал «Успехи физических наук», посвященная его юбилею. 14 октября утром мне на работу позвонили из редакции газеты «Известия» с просьбой срочно написать статью об Абраме Федоровиче Иоффе, которая должна была быть опубликована в день его рождения 30 октября. А через два часа после этого звонка мне сообщили из Ленинграда, что Абрам Федорович внезапно скончался у себя в лаборатории.

В. Иоффе

Мой отец — о моем будущем

Ниже публикуются воспоминания дочери Абрама Федоровича Иоффе Валентины Абрамовны Иоффе, доктора физико-математических наук, старшего научного сотрудника Института химии силикатов АН СССР.

Когда я кончала школу и должна была решить, чему учиться дальше, отец часто говорил со мной о моем будущем. Он очень хотел, чтобы я стала физиком, но какое бы то ни было давление с его стороны исключалось. Он лишь стремился обрисовать мне будущее научного работника-физика, а решать, соблазняет ли меня такая перспектива, предоставлял мне самой.

Мой отец был человеком очень широких интересов. Он любил и хорошо знал музыку, часто бывал в филармонии на концертах классической музыки. Талант юного Шостаковича он оценил с первых его шагов. Не меньше он любил и театр — оперу, драму; мог по нескольку раз смотреть спектакли театра имени Вахтангова, Художественного театра. С большим интересом относился ко всем экспериментам в области театрального искусства.

Он знал и любил стихи, особенно Пушкина и Лермонтова. Много читал, хорошо знал классику, но и за новой литературой следил до самого последнего времени.

Отец очень любил природу, особенное его восхищение вызывали деревья и цветы. Он любил далекие прогулки, нередко ходил в горы — в молодости в Швейцарии, а потом, уже в зрелом возрасте, в Крыму и на Кавказе. Хорошо плавал, играл в теннис.

Он любил жизнь во всех ее проявлениях и умел получать радость из разных источников. Но все меркло перед радостью, доставляемой ему занятием наукой — удачной догадкой, четко поставленным опытом. Он часто говорил, что в его увлеченности физикой присутствует азарт, в чем-то сходный с азартом игрока,— азарт догадки, в результате которой игрок получает выигрыш, а ученый — объяснение неизвестного явления. Он считал, что занятия физикой не требуют каких-то особых дарований — заниматься физикой и получать от этого радость может каждый. Важно почувствовать эту радость, и тогда жизнь будет наполнена живым интересом, очень мало зависящим от внешних обстоятельств.

Отец был горячим сторонником вовлечения в научную работу женщин. Он всегда с восхищением говорил о Марии и Ирэн Кюри, о Лизе Мейтнер и других женщинах-физиках, стоящих в первых рядах современной науки.

В заключение мне хочется привести выдержку из письма моего отца ко мне, пятнадцатилетней ученице последнего класса школы:

«...Ты увидишь, что если интересны некоторые факты, теории и методы, то еще интересней нерешенные проблемы, видимые противоречия, для которых надо найти решение, отыскав предварительно исходный корень, порождающий данное противоречие...

Ты, по-видимому, не очень веришь в свои таланты. Сейчас, конечно, нельзя их предсказать. Но разного типа ученые создавали наше современное мировоззрение. Нельзя описать точно, каким «должен» быть человек, который хочет стать ученым. Разными путями открывается истина...

Потом, уменье ясно видеть вещи, понимать ясное и узнавать непонятное духовно развивает и сравнивает с людьми наиболее высокой культуры.

Наконец, искать и находить новые пути и новое понимание — одно из самых больших удовольствий».

А. Иоффе

Электрон

Одна из составных частей атома — отрицательно заряженный электрон — была обнаружена еще в XIX в. В 1897 г. удалось, хотя и грубо, измерить заряд электрона; позднее измерена была его масса и еще позже были обнаружены другие его свойства — вращательный и магнитный моменты.

При освещении, в особенности ультрафиолетовым светом, отрицательно заряженное тело постепенно теряет свой заряд, а нейтральное — заряжается положительно. Явление это, называемое фотоэлектрическим эффектом или, короче, фотоэффектом, было исследовано Столетовым еще в XIX в. Характер испускаемых телом при фотоэффекте зарядов — электронов — особенно наглядно виден в поставленном мной в 1912 г. опыте, который был видоизменением уже ранее применявшихся устройств.

В пространстве между двумя параллельными горизонтальными пластинами A и B (рисунок 1) попадали мелкие заряженные металлические пылинки o. Если частичка оказывается заряженной отрицательно, то ее можно удержать от падения, зарядив верхнюю пластину положительно, а нижнюю — отрицательно. Положительно заряженная пылинка удерживается полем противоположного знака. Можно подобрать такую разность потенциалов U_1 между пластинами, чтобы электрическая сила как раз уравновешивала силу тяжести. Тогда пылинка повисает неподвижно на много часов.

Электрическая сила, которая действует на заряд e_1 пылинки, направлена вверх и равна $e_1\frac{U_1}{d}$, где d — расстояние между пластинами A и B. Обозначим силу тяжести, действующую на пылинку, через P. Условие равновесия пылинки в пространстве между пластинами — равенство силы тяжести и электрической силы:

$$P = e_1\frac{U_1}{d}.$$

В этом состоянии я освещал пылинку источником света, вызывающим фотоэлектрический эффект. Спустя некоторое время неподвижная прежде пылинка начинала падать. Так как сила тяжести P не могла измениться от освещения, не изменились U_1 и d, то, следовательно, уменьшился заряд e_1 до какой-то величины e_2.

Увеличивая разность потенциалов U_1 до нового значения U_2, можно было снова остановить падение пылинки; при этом должно удовлетворяться равенство $e_2\frac{U_2}{d} = P$.

Заряжая и снова разряжая пылинку, можно было этот процесс повторять сотни раз, каждый раз при соответственных потенциалах U_1, U_2, U_3,... Оказалось, что различные заряды e_1, e_2, e_3, ..., которые имела пылинка, точно выражались следующим соотношением:

$$e_1:e_2:e_3:\ldots = \frac{1}{U_1}:\frac{1}{U_2}:\frac{1}{U_3}:\ldots = 1:2:3:\ldots$$

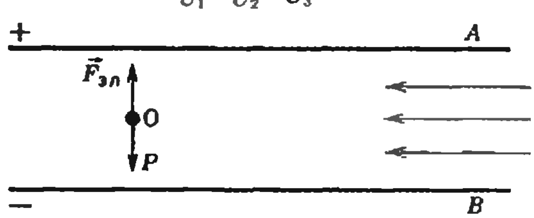


Рис. 1. Схема опыта по определению заряда электрона.

Эта статья — отрывок из книги А. Ф. Иоффе «Основные представления современной физики» (М.— Л., ГИТТЛ, 1949). Мы помещаем его с небольшими изменениями и дополнениями. Дополнения напечатаны мелким шрифтом.

Заряды пылинки изменялись как ряд целых чисел. Когда на пылинке оставался один отрицательный заряд, то она теряла его целиком при освещении и оставалась незаряженной. Действительно, никакой разностью потенциалов U (ни положительной, ни отрицательной) не удавалось замедлить падение частички. Но если во время падения продолжать освещение, то спустя некоторое время пылинка, теряя еще один заряд, заряжалась положительно, и тогда ее снова можно было остановить, но только уже противоположной разностью потенциалов, когда потенциал верхней пластины отрицательный, а нижней — положительный.

Тысячи таких опытов с пылинками из различных материалов показали, что заряд любой пылинки всегда состоит из целого числа вполне определенных порций, равных по наиболее точным современным измерениям $4{,}8024 \cdot 10^{-10}$ абсолютных электростатических единиц (за единицу принимается заряд, отталкивающий равный ему заряд, помещенный на расстояние в 1 см, с силой в 1 дину)*). Каждый раз, когда при освещении пылинка теряла отрицательный заряд, он оказывался равным $-4{,}8024 \cdot 10^{-10}$ абс. ед.

Эти единичные отрицательные заряды получили название электронов.

Никогда и нигде не удавалось наблюдать зарядов, меньших заряда электрона или равных нецелому числу зарядов электрона. Такие же отрицательно заряженные частицы — электроны — испускают накаленные тела. Это явление называют термоэлектронной эмиссией; им широко пользуются в радиолампах.

При пропускании электрического заряда сквозь сильно разреженные газы из отрицательного полюса (катода) выходит поток отрицательных зарядов, называемый катодными лучами. Удалось показать, что и катодные лучи — поток тех же электронов.

Поместив катодные лучи или поток фотоэлектронов в магнитное поле, можно определить отношение заряда электронов e к их массе m, а следовательно, и самую массу электронов.

Оказалось, что не только заряды, но и массы m электронов самого различного происхождения в точности совпадают и что

$$m = 9{,}1060 \cdot 10^{-28} \text{ г.}$$

В течение первого десятилетия нашего века электрон был единственной известной тогда «элементарной» частицей. Физики думали, что электрон — последний и простейший элемент природы, и представляли его себе, как раньше атом, в виде шарика, по объему или по поверхности которого распределен электрический заряд.

Однако и тогда уже, в 1908 г., В. И. Ленин указывал, что принцип диалектического материализма о неисчерпаемом многообразии природы заставляет ожидать, что и электрон — сложное образование.

Это предвидение позже подтвердилось, хотя мы и сейчас не можем быть уверены в полноте существующей картины электрона.

Оказалось, что электрон обладает вращательным моментом (спином) s и магнитным моментом μ.

Магнитный момент электрона определяет максимальный момент сил, действующих на электрон в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$:

$$M_{max} = |\vec{B}|\mu.$$

Для витка с током I

$$M_{max} = |\vec{B}|IS,$$

где S — площадь, ограниченная витком (см. «Физика 9»). Поэтому магнитный момент витка с током равен $\mu = IS$. Магнитный момент — величина векторная. Вектор $\vec{\mu}$ направлен перпендикулярно плоскости витка.

Магнитные свойства электрона с полной наглядностью обнаруживаются в опытах, которые были поставлены Штерном и Герлахом по методу молекулярного пучка. В этом методе изучается поток молекул в виде тонкой ленты, выделенной при помощи системы узких щелей в пространстве, в котором создано воз-

*) По измерениям, проведенным к настоящему времени, наименьший электрический заряд (положительный или отрицательный) равен $e = 4{,}803250(21) \cdot 10^{-10}$ абсолютных электростатических единиц (ед. СГСЭ), или (в СИ) $e = 1{,}6021892(46) \cdot 10^{-19}$ Кл.

можно высокое разрежение. Всякое отклонение такого потока молекул от прямолинейного пути может быть вызвано только действием сил, а эти силы могут быть вычислены по начальной скорости молекул и величине отклонения. Этот метод применяется для обнаружения самых разнообразных воздействий, в том числе даже таких слабых, как силы тяготения.

Если пропустить молекулярный пучок через сильное и притом резко неоднородное магнитное поле, то отдельные молекулы отклонятся тем сильнее, чем больше их магнитный момент и чем меньше угол между направлением магнитного момента и направлением магнитного поля, через которое проходят молекулы.

Магнитный момент может происходить как от магнитных свойств самого электрона, так и от того электрического тока, который электрон создает, двигаясь по замкнутой орбите. Если, например, электрон движется по окружности радиуса r со скоростью v, то через поперечное сечение окружности электрон проходит $v/2\pi r$ раз в секунду, перенося каждый раз свой заряд e. Таким образом, вращающийся по окружности радиуса r электрон представляет собой ток $i=ev/2\pi r$. Магнитный момент μ движущегося по круговой орбите электрона равен

$$\mu=\pi r^2 i=\frac{evr}{2}.$$

Механический момент количества движения такого вращающегося по орбите электрона — $L=mvr$.

Таким образом, для движущегося по круговой орбите электрона

$$\frac{\mu}{L}=\frac{e}{2m}.$$

В атомах водорода, лития и серебра механический вращательный момент электронов при движении по орбите равен нулю: $L=0$. Поэтому и магнитный момент μ должен быть равным нулю.

Между тем для потока всех этих атомов получилось хорошо измеримое отклонение при прохождении сквозь магнитное поле (рисунок 2). При этом весь поток разбивался на

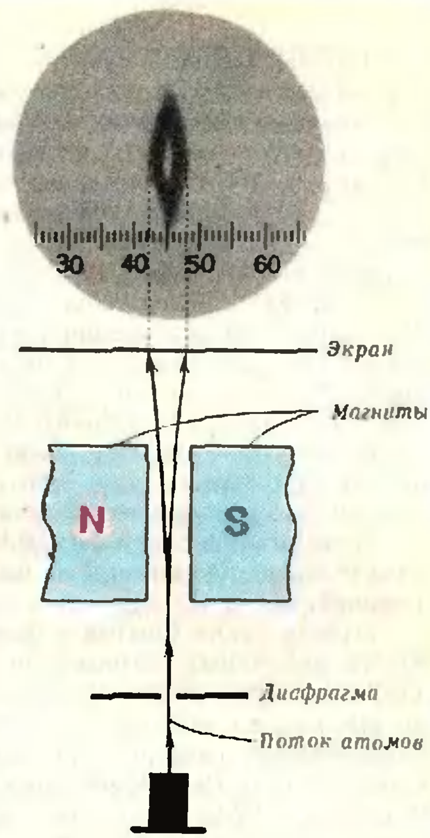


Рис. 2. Схема опыта Штерна и Герлаха.

две части, отклонявшиеся в противоположные стороны на равные углы (фото на рисунке 2). Из результатов этого опыта мы заключаем, что:

1) электроны, независимо от своего движения, обладают определенным магнитным моментом даже при $L=0$;

2) проходя сквозь магнитное поле, электроны всех атомов ориентируются так, что их магнитные моменты $\vec{\mu}$ направлены либо по направлению магнитного поля (параллельная ориентация), либо в противоположную сторону (антипараллельная ориентация); промежуточные же ориентации полностью отсутствуют.

Оказывается, наряду с магнитными свойствами электрон обладает и определенным моментом вращения s; однако соотношение между μ и s в этом случае имеет иное значение:

$$\frac{\mu}{s}=\frac{e}{m}$$

— отношение μ/s вдвое больше, чем отношение μ/L.

Существование механического момента, связанного с магнитным, было показано в опытах, идея которых принадлежит Эйнштейну и де Хаасу, но которые в особо наглядной форме были поставлены П. Л. Капицей и мной в 1920 г.

В хорошо откачанной кварцевой трубе на длинной тонкой нити подвешивался намагниченный никелевый стерженек. Магнитное поле Земли было сведено к нулю. Окружая трубу горячей печью или пламенем газовой горелки, можно было быстро нагреть стерженек выше температуры в 360°С, когда никель размагничивается; в этот момент стерженек начинал закручиваться.

Намагничивание никеля вызвано тем, что магнитные моменты атомных электронов поворачиваются в одну сторону. При размагничивании они, наоборот, разбрасываются тепловым движением по всем направлениям.

Так как электронные магнитики в то же время вращаются вокруг своей оси, то намагниченный стерженек обладает скрытым в его электронах вращательным моментом. При размагничивании этот момент исчезает. Но, согласно основным законам механики, вращательный момент системы неизменен, как неизменна и ее энергия.

В нашем случае подвешенный в пустоте стерженек не может передать своего вращательного момента окружающей среде. Вращательный момент электронов намагниченного стерженька при размагничивании перешел в момент количества движения всего стерженька как целого — стерженек начал вращаться.

Первоначальные опыты Эйнштейна и де Хааса, проведенные с железом, дали для отношения μ/L значение, в пределах 20% совпадающее с величиной $e/2m$, относящейся к движению электронов по круговым орбитам. Однако впоследствии, устранив незамеченные прежде ошибки опыта, они установили, что

$$\frac{\mu}{L} = \frac{e}{m},$$

как это должно быть для вращающихся вокруг собственной оси электронов. Таким образом, опыты Эйнштейна и де Хааса показали, что намагничивание железа объясняется наличием у электронов собственных магнитных моментов, не связанных с движением электронов по орбитам.

Соотношение между μ и s было определено Барнетом другим методом: приводя в быстрое вращение стержни из различных материалов, Барнет ориентировал этим механические моменты (спины) электронов и таким образом превращал стержни в магниты. Эти измерения привели к тому же соотношению μ и s, которое имеет место для спинов электронов.

Все эти спины, в полном согласии с теорией, приводят к следующему результату: магнитный момент $\vec{\mu}$ электрона в магнитном поле устанавливается параллельно или антипараллельно полю, и проекции $\vec{\mu}$ на направление индукции $\vec{B}$ поля равны

$$\mu_B = \pm\frac{1}{2}\frac{e}{m}\frac{h}{2\pi} = \pm\frac{1}{2}\frac{e}{m}\hbar.$$

Знак «+» соответствует параллельной установке, знак «—» соответствует антипараллельной установке.

Этим проекциям магнитного момента соответствуют проекции спина s электрона

$$s_B = \pm\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi} = \pm\frac{1}{2}\hbar.$$

В этих формулах h — универсальная постоянная (постоянная Планка), равная $6{,}624 \cdot 10^{-27}$ эрг · с *).

В полную характеристику электрона входит, наряду с его зарядом e и массой m, и его спин s.

Если система состоит из нескольких электронов, их спины могут устанавливаться только двумя путями: 1) параллельно друг другу, создавая механический и магнитный моменты системы, равные сумме моментов всех электронов; 2) антипараллельно, взаимно компенсируя друг друга, полностью или частично.

*) По современным данным $h = 6{,}626 \times 10^{-27}$ эрг · с $= 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Ю. Михеев

Одной линейкой

На этом занятии математического кружка мы будем решать задачи на построение одной линейкой. Что можно построить таким образом из данных четырех точек? Мы дадим некоторый ответ на этот вопрос. Попутно будет решена задача М625.

Дан конечный набор точек, линейка и карандаш. Какие новые точки можно тогда построить?

Уточним постановку задачи. Точку будем считать *построенной*, если она одна из данных или является пересечением двух построенных прямых; в свою очередь, прямую будем считать *построенной*, если она проходит через построенные (в частности, данные) точки. Общая задача состоит в том, чтобы *описать множество точек, которые можно построить исходя из данного конечного набора точек.*

Ясно, что если даны одна, две или три точки, никаких новых точек построить нельзя (рис. 1); если даны четыре точки, какие-то три из которых (или все четыре) лежат на одной прямой, тоже, очевидно, никаких новых точек построить нельзя (рис. 2); если, наконец, даны четыре точки, лежащие в вершинах параллелограмма, можно построить только одну точку — его центр (рис. 3). Пусть теперь даны четыре точки, не образующие вершины параллелограмма и такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Для краткости будем здесь говорить, что такие точки находятся *в общем положении.*

Рассмотрим сначала частный случай: данные точки P, Q, P', Q' лежат в вершинах трапеции (рис. 4). В первых шести задачах эта конфигурация считается заданной.

З а д а ч а 1. *Разделить отрезок PQ пополам.*

Решение показано на рисунке 4. На нем черным изображены данные точки P, Q, P', Q' и параллельные прямые PQ, $P'Q'$, дальнейшие построения выполнены красным цветом, причем номерами указан порядок проведения прямых.

З а д а ч а 2. *Удвоить отрезок $P'Q'$.*

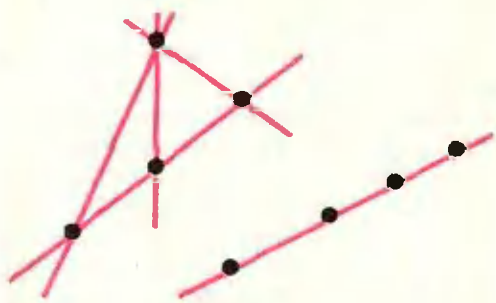


Рис. 2.

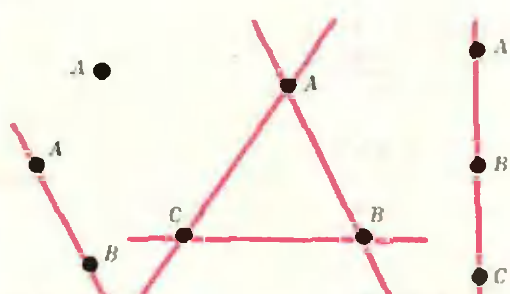


Рис. 1.

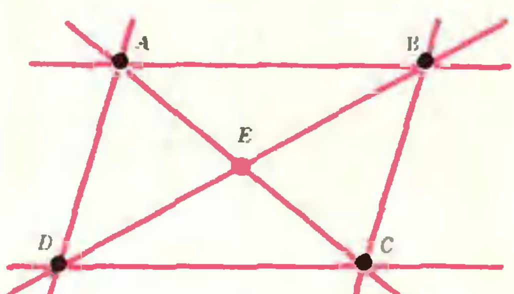


Рис. 3.

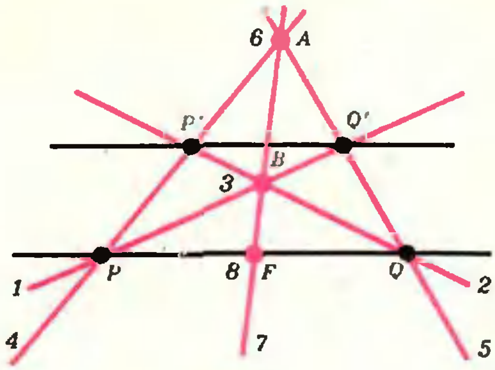


Рис. 4.

Решение показано на рисунке 5: на нем черным изображена и уже построенная точка F — середина $[PQ]$. Равенство $|P'Q'|=|Q'R'|$ следует из подобия треугольников $\triangle PMF \sim \triangle R'MQ'$, $\triangle FMQ \sim \triangle Q'MP'$ и равенства $|PF|=|FQ|$.

Задача 3. *Построить отрезок длины $n \cdot |P'Q'|$.*

Для этого нужно просто $n-1$ раз повторить процедуру, использованную в предыдущей задаче. На рисунке 6 построение показано для $n=3$.

Разумеется, аналогично на прямой PQ можно построить отрезок длины $m \cdot |PQ|$.

Задача 4. *Разделить отрезок $P'Q'$ на m равных частей.*

Решение. Сначала на прямой PQ строим $m-1$ конгруэнтных отрезков PQ_2, $Q_2Q_3, \ldots, Q_{m-1}Q_m$. Затем строим (PP') и (Q_mQ') и соединяем их точку пересечения A с точками Q_2, $Q_3, \ldots, Q_{m-1}$. Полученные $m-1$ прямых делят $[P'Q']$ на m равных частей. Для $m=4$ конструкция показана на рисунке 7.

(Заметим, что конструкция не проходит, если $(PP') \parallel (Q_mQ')$. Но эту трудность легко обойти: можно сначала удвоить $[PQ]$, затем построить m отрезков, конгруэнтных удвоенному отрезку, и далее повторить указанное в предыдущем абзаце построение.)

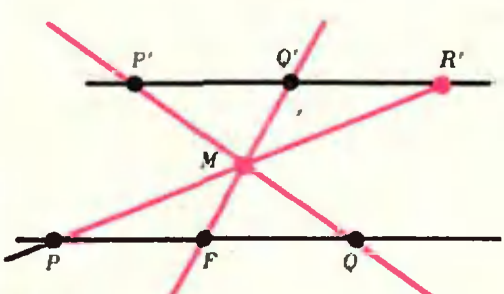


Рис. 5.

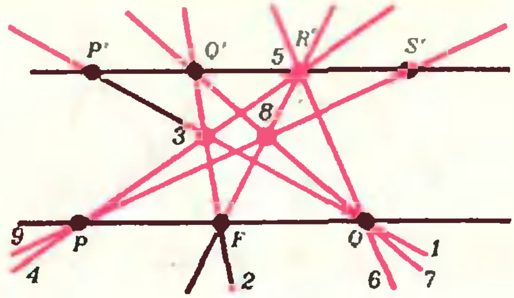


Рис. 6.

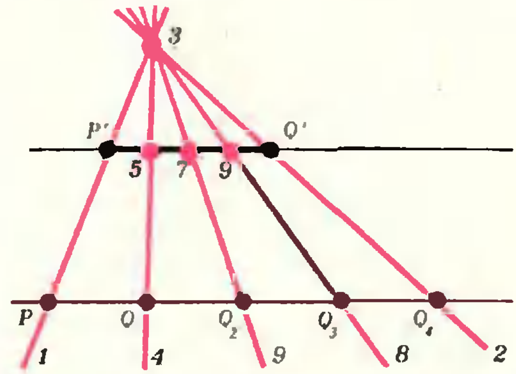


Рис. 7.

Для дальнейшего нам придется предположить, что данные точки F, Q, $P'Q'$ — *рациональные*, то есть имеют рациональные координаты относительно некоторой системы координат.

Задача 5. *Построить произвольную рациональную точку S на прямой PQ.*

Решение. Для рациональных точек P, Q, S отношение $|PS|:|PQ|$ рационально (докажите!), и значит $|PS|=\frac{m}{n}|PQ|$, где $m, n \in \mathbb{N}$. Поэтому достаточно разделить отрезок PQ на n равных частей и m раз отложить от точки P полученный отрезок.

Точно так же можно построить любую рациональную точку $T \in (P'Q')$.

Задача 6. *Построить произвольную рациональную точку T на плоскости.*

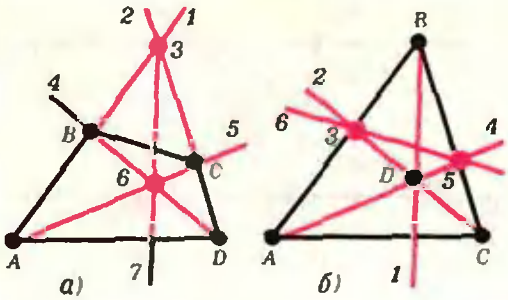


Рис. 8.

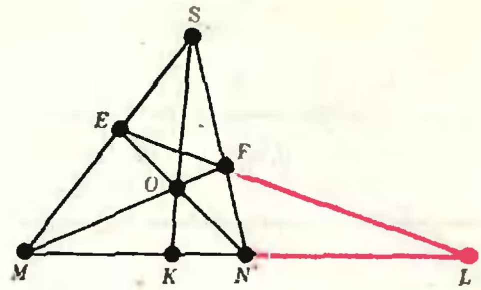


Рис. 9.

Р е ш е н и е. Допустим, точка T уже построена. Проведем прямые TP' и TQ'; они пересекут*) (PQ) в точках E и F. Так как прямые TP', TQ', PQ рациональны (то есть записываются в виде линейных уравнений с рациональными коэффициентами), координаты точек E и F получаются как решения систем линейных уравнений с рациональными коэффициентами и поэтому тоже рациональны. Умея строить E и F, мы построим и точку T.

Итак, отправляясь от трапеции с рациональными вершинами, можно построить вообще любую рациональную точку! Естественно спросить — а какие еще точки можно построить? Оказывается — никаких.

З а д а ч а 7. *Доказать, что любая точка, построенная одной линейкой из набора рациональных точек, рациональна.*

Действительно, прямая, проходящая через рациональные точки, рациональна и точка пересечения рациональных прямых (как решение системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами) тоже рациональна.

Заметим попутно, что нами решена задача М625а).

Пусть теперь A, B, C, D — четыре р а ц и о н а л ь н ы е точки, находящиеся в общем положении. Вы, наверное, угадали, какие точки можно построить исходя из точек A, B, C, D — конечно же, как и в предыдущем случае, *все рациональные*. Более того, ясно, как можно постараться закончить доказательство этого факта: достаточно получить две параллельные прямые. Но это как раз самая трудная часть наших построений.

По условию точки A, B, C, D либо образуют выпуклый четырехугольник, отличный от параллелограмма, либо одна из точек находится внутри треугольника, образованного остальными тремя точками. Проведя в каждом из этих случаев прямые, как на рисунках 8, *а*, *б*, получим одинаковые конфигурации. Поэтому введем новые обозначения (см. рисунок 9, на котором данные и построенные точки не различаются).

Впрочем, из наших условий не следует, что прямые EF и MN пересекаются: они могут быть и параллельными. Когда же это произойдет?

З а д а ч а 8. *Доказать, что если* $|MK|=|KN|$, *то* $(MN)\parallel(EF)$.

Р е ш е н и е легко получить, если вспомнить решение задачи 2.

З а д а ч а 9. *В случае, когда* $|MK|=2|KN|$, *построить прямую, параллельную* (MN).

Р е ш е н и е. Сперва докажем, что в нашем случае $|MN|=|NL|$. Для этого нам придется применить теоремы Чевы и Менелая (их доказательства можно прочитать, например, в «Кванте», 1976, № 11, с. 22). Первая из этих теорем утверждает, что если вершины треугольника EFK (рис. 9) лежат соответственно на прямых MS, SN, NM, то

$$\frac{|MK|}{|KN|}\cdot\frac{|NF|}{|FS|}\cdot\frac{|SE|}{|EM|}=1. \qquad (1)$$

Вторая утверждает, что если точки E, F, L лежат соответственно на прямых SM, SN, MN и расположе-

*) В противном случае $T\in(P'Q')$, а этот случай уже разобран.

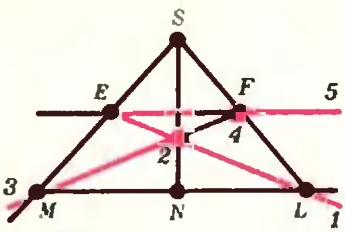


Рис. 10.

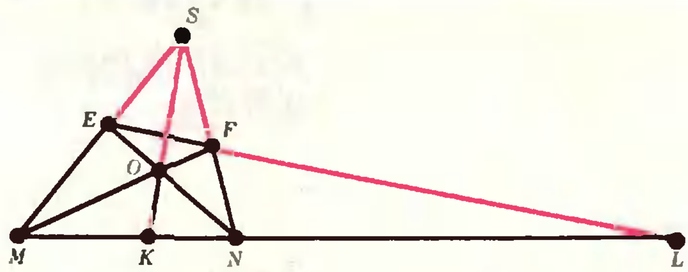


Рис. 11.

ны на одной прямой, то

$$\frac{|ML|}{|LN|}\cdot\frac{|NF|}{|FS|}\cdot\frac{|SE|}{|EM|}=1. \qquad (2)$$

Сопоставляя эти равенства, получаем $|ML|=2|NL|$, откуда $|MN|=|NL|$. А теперь построение параллельной прямой легко получается известным нам, в сущности, способом (рис. 10).

Задача 10. *В случае, когда* $2|MK|=3|KN|$, *постройте прямую, параллельную* (MN).

Указание. Покажите, что $|MN|=2|NL|$, (рис. 11), и примените задачу 9.

Задача 11. *Постройте прямую, параллельную прямой* MN, *в общем случае.*

Решение нам подсказывают предыдущие задачи. Пусть $|MK|:|KN|=p:q$, где $p>q$ (случай $p<q$ сводится к этому переименованием точек). Рассуждать мы будем индукцией по l. Базис индукции, то есть случай $l=1$, уже разобран (задача 8). Предположим, что при $p, q\leqslant l$ мы умеем по точкам M, K, L строить прямую, параллельную (MN). Пусть теперь $|MK|:|KN|=(l+1):q$. Сопоставляя (1) и (2), получаем

$$\frac{|MN|}{|ML|}=\frac{l+1-q}{q}$$

и можно воспользоваться предположением индукции, согласно которому по точкам M, N, L можно построить прямую, параллельную прямой (MN).

Таким образом, мы доказали следующую замечательную теорему (и попутно решили задачу М625):

Теорема. *Множество точек, которые можно построить одной линейкой из четырех рациональных точек, находящихся в общем положении, состоит из всех рациональных точек плоскости.*

Очевидно, увеличение числа исходных рациональных точек не меняет *множества точек, которые* можно построить.

Наверное, читателю хотелось бы узнать, какие точки можно построить исходя из четырех точек в общем положении, не все координаты которых рациональны. К сожалению, чтобы хорошо и точно сформулировать ответ, необходимо привлечь понятия из проективной геометрии. Однако интуитивно ясно, что в указанном случае получается множество точек, очень «похожее» на множество всех рациональных точек. Если говорить более точно, то данное множество «проективно-эквивалентно» множеству рациональных точек.

Упражнения

1. С помощью циркуля и линейки, исходя из четырех точек в общем положении, постройте точку, которую нельзя построить одной линейкой (циркулем разрешается строить окружность $O(A, |AB|)$, где A, B — построенные точки; точки пересечения построенной окружности с построенной прямой считаются построенными).

2.* Даны три точки O, A, B и две параллельные прямые l, m, причем $A, B\in l$ и $O\notin l$, $O\notin m$. Построить одной линейкой

а) прямую, проходящую через O параллельно l;

б) прямую, проходящую через A параллельно OB.

3*. Даны пять точек $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(\sqrt{3}, 0)$. Какие точки можно из них построить одной линейкой?

задачник Кванта

Задачи

М646 — М650; Ф658 — Ф662

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 декабря 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М646, М647» или «Ф658». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М646. От точки O на плоскости отложены $2n$ векторов длины 1. Они раскрашены попеременно в красный и синий цвета. Пусть $\vec{s}$ — сумма n красных векторов, $\vec{r}$ — сумма n синих векторов. Докажите, что

$$|\vec{s}-\vec{r}| \leqslant 2\ldots$$

Е. Шустин

М647. Докажите, что при любых $a \geqslant \frac{1}{2}$, $b \geqslant \frac{1}{2}$ справедливо равенство

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2 \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}.$$

С. Фомин

М648. Докажите, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.

И. Шарыгин

М649. Доказать равенство

$$c_n^2 + (c_n-c_1)^2 + (c_n-c_2)^2 + \ldots + (c_n-c_{n-1})^2 = \frac{n}{2},$$

где $c_1 = 1$, $c_2 = 1+\frac{1}{3}$, $c_3 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}, \ldots,$ $c_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$.

С. Манукян

М650. Существует ли последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

а) натуральных чисел такая, что любое натуральное число единственным образом записывается в виде суммы нескольких ее членов:

$$a_{i_1} + a_{i_k} (i_1 < \ldots < i_k,\ k \geqslant 1); \qquad (*)$$

б) натуральных чисел такая, что 1 не представляется в виде (*), а любое натуральное число, большее 1, представляется в виде (*) единственным образом;

в) целых чисел такая, что 0 не представляется в виде (*), а любое целое число, отличное от 0, представляется в виде (*) единственным образом;
г)* целых чисел такая, что 0 и 1 не представляются в виде (*), а любое целое число, отличное от 0 и 1, представляется в виде (*) единственным образом?

А. Разборов

Ф658. Из баллона, в котором находятся сильно разреженные пары калия, через узкую горизонтальную трубку выходит пучок атомов. Определить температуру паров, если на горизонтальном пути длиной $l=50$ см среднее смещение атомов по вертикали составляет $h=3{,}2$ мкм.

Ф659. Небольшой станок массой $m=200$ кг вибрирует при работе из-за неоднородности тяжелого маховика, вращающегося с угловой скоростью 600 об/с. Чтобы снизить вибрации перекрытия в цехе, в котором установлен станок, под станину положили упругую прокладку толщиной $h=10$ см из материала с модулем упругости $E=3{,}1\cdot10^8$ Н/м². Площадь основания станины $S=2$ м². Приведет ли установка прокладки к уменьшению вибраций перекрытия?

Р. Винокур

Ф660. Поплавок, изготовленный из однородного материала, имеет форму чечевицы — тела, ограниченного двумя сферическими поверхностями радиусов $R_1=R_2=R=3$ см. Максимальная толщина чечевицы $h=4$ см; масса чечевицы $m_1=5$ г. В поплавок на всю толщину вдоль оси симметрии воткнута спица длиной $l=10$ см и массой $m_2=3$ г. Устойчиво ли положение поплавка, когда он плавает на поверхности воды спицей вверх? Считать, что в жидкость погружена меньшая часть чечевицы.

Всероссийская олимпиада по физике

Ф661. На рисунке 1 приведены вольтамперные характеристики двух нелинейных резисторов R_1 и R_2. Какими будут токи, идущие через резисторы и источник с ЭДС $\mathcal{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=2$ Ом, если оба резистора подключить к источнику, соединив их: а) последовательно? б) параллельно?

И. Слободецкий

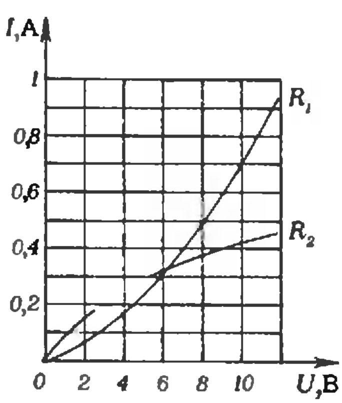


Рис. 1.

Ф662. Для подзарядки аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E}=12$ В от мощного источника напряжения $U=5$ В собрана схема из катушки с индуктивностью $L=1$ Гн, диода $Д$ и прерывателя K (рис. 2), который периодически замыкается и размыкается на одинаковые промежутки времени $\tau_1=\tau_2=0{,}01$ с. Определить средний ток заряда аккумулятора.

А. Зильберман

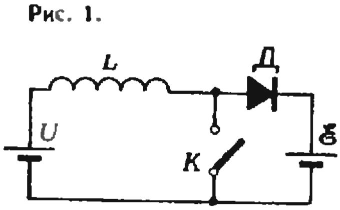


Рис. 2.

Решения задач

М600, М601, М603; Ф604—Ф607

М600. *Два велосипедиста едут по двум пересекающимся окружностям. Каждый едет по своей окружности с постоянной скоростью. Выехав одновременно из одной из точек их пересечения и сделав по одному обороту, велосипедисты вновь встретились в этой точке. Докажите, что на плоскости, в которой лежат окружности, существует такая неподвижная точка, расстояния от которой до велосипедистов все время одинаковы, если они едут: а) в одном направлении (против часовой стрелки); б) в разных направлениях.*

Рис. 1.

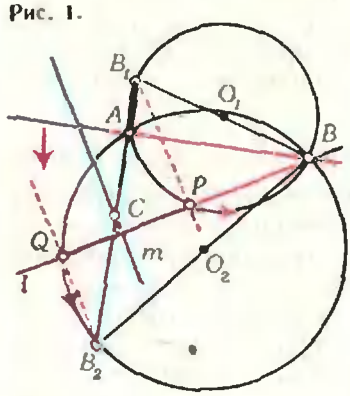


Рис. 2.

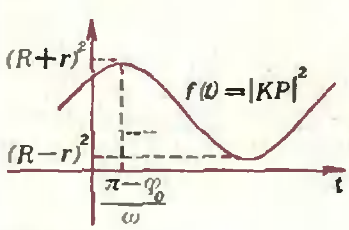


Рис. 3.

а) Изучим сначала случай, когда велосипедисты P и Q едут в одну сторону (оба — против часовой стрелки). В этом случае интересно смотреть на них из второй точки B пересечения окружностей: *точки P, Q находятся в течение всего движения на одной прямой, проходящей через B*. В самом деле, если вращать вокруг фиксированной точки окружности прямую l с постоянной угловой скоростью ω, то вторая точка пересечения прямой l с окружностью будет двигаться по этой окружности с угловой скоростью 2ω (то есть пока прямая повернется на угол ω, эта вторая точка пройдет дугу величиной 2ω — см. рис. 1)*). Таким образом, в нашей задаче обе точки P и Q, движущиеся по своим окружностям с одинаковыми угловыми скоростями, можно рассматривать как точки пересечения с окружностями прямой l, вращающейся вокруг точки B (с вдвое меньшей угловой скоростью). Теперь уже нетрудно доказать, что серединный перпендикуляр m к (подвижному) отрезку PQ будет все время проходить через одну и ту же (неподвижную) точку плоскости C. (Это и будет означать, что все время $|PC|=|QC|$.) Перпендикулярные l прямые, восстановленные в точках P и Q, проходят, очевидно, через проведенные точки B_1 и B_2, диаметрально противоположные B в одной и другой окружностях (рис. 2). Поэтому параллельная им прямая m, идущая ровно посередине между ними, проходит через середину C отрезка B_1B_2. (Заметим, хотя этого уже не требуется для решения, что неслучайно на нашем рисунке прямая B_1B_2 прошла через точку A пересечения окружностей: во-первых, в начальный момент времени, когда $l=(AB)$ и $P=Q=A$, все три перпендикуляра к l сливаются в одну прямую B_1B_2; во-вторых, $[O_1O_2]$ — средняя линия треугольника B_1BB_2 — делит хорду AB пополам.)

б) Для случая, когда точки P и Q вращаются в разных направлениях, также можно найти чисто геометрическое доказательство. Но мы приведем более простое аналитическое рассуждение, которое, кстати, дает еще одно решение и для уже рассмотренного случая.

Пусть точка P «бегает» по окружности радиуса r с центром O и $|OK|=R$. Если угловая скорость точки P равна ω, а угол между векторами OK и OP в момент времени $t=0$ равен φ_0, то в любой момент времени t квадрат расстояния $f(t)=|KP|^2$

$$f(t)=r^2+R^2-2rR\cos(\varphi_0+\omega t)$$

(график функции f изображен на рисунке 3).

Мы хотим, чтобы такие функции, определенные для двух разных окружностей (разного радиуса, с центрами, находящимися на разных расстояниях от точки K), тождественно совпадали. Но, с другой стороны, ясно, что, зная $f(t)$ для всех t, мы однозначно определим значения $(R+r)^2$ и $(R-r)^2$, а значит, $R+r$ и Rr, то есть определим и пару чисел $(R;\ r)$; правда, эта пара определяется лишь с точностью до перестановки: окружность радиуса R, центр которой удален от точки K на расстояние r, будет (при надлежащей «начальной фазе» точки P) давать в точности ту же функцию f, что и исходная окружность. (Заметим, что мы

*) В книге Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Прямые и кривые» (М., «Наука», 1978) это утверждение — «теорема о колечке на окружности» — рассматривается как вариант теоремы о вписанном угле.

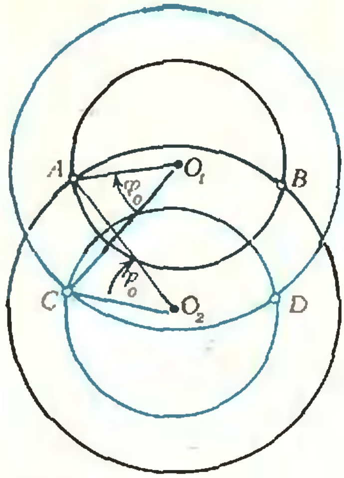


Рис. 4.

можем также поменять знак у ω и одновременно у φ_0, $-\pi\leqslant\varphi_0<\pi$, не меняя f.)

В этом — ключ к построению точки C из задачи а), совершенно отличному от предложенного выше; заодно мы получим и нужную в задаче б) точку D, и готовое доказательство.

Пусть данные окружности — радиуса r с центром O_1 и радиуса R с центром O_2. Проведем (голубые) окружности: радиуса R с центром O_1 и радиуса r с центром O_2 (рис. 4). Точки пересечения C и D этих окружностей (они получаются соответственно из точек A и B симметрией относительно серединного перпендикуляра n отрезка O_1O_2) и есть искомые точки. После сказанного выше нужно проверить лишь, что начальные фазы φ_0 либо а) совпадают (при одинаковых ω), либо б) противоположны (при ω, противоположных по знаку) — тогда и функции f, соответствующие движениям точек P и Q по окружностям, будут совпадать.

В случае а) равенство углов $\overrightarrow{O_1C}$ с $\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2C}$ с $\overrightarrow{O_2A}$ следует из симметрии относительно n; в случае б) равенство углов $\overrightarrow{O_1D}$ с $\overrightarrow{O_1A}$ и $\overrightarrow{O_2D}$ с $\overrightarrow{O_2A}$ (с переменой знака) видно из того, что четырехугольник AO_1DO_2 — параллелограмм.

Н. Васильев

М601. *Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот треугольника ABC с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A, и делит этот отрезок пополам.*

Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, A' — точка описанной окружности, диаметрально противоположная вершине A (рис. 1). Соединим точку A' с вершинами B и C. Треугольники ABA' и ACA' — прямоугольные (углы при вершинах B и C опираются на диаметр), а потому $[A'B] \parallel [CH]$ и $[A'C] \parallel [BH]$. Значит, четырехугольник $BA'CH$ — параллелограмм. Его диагонали $[BC]$ и $[A'H]$ в точке пересечения делятся пополам, откуда и следует утверждение задачи.

Итак, мы доказали, что точка A', симметричная точке H относительно середины стороны BC, лежит на описанной

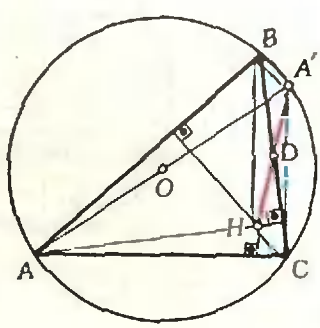


Рис. 1.

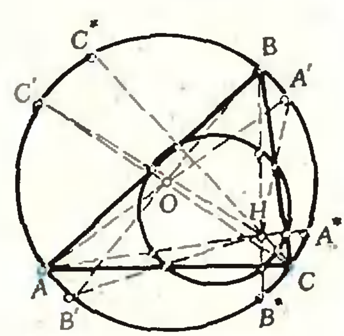


Рис. 2.

окружности. Заметим, что точка A^*, симметричная точке H относительно прямой BC, также лежит на описанной окружности — это проекция точки A' на продолжение высоты AH (рис. 2). Аналогично можно построить точки B' и B^*, C' и C^*. Образ описанной около треугольника ABC окружности при гомотетии с центром H и коэффициентом $1/2$ — это знаменитая «окружность Эйлера», или «окружность девяти точек» (имеются в виду образы точек A, B, C, A', B', C', A^*, B^*, C^*) треугольника ABC («Квант», 1979, № 8).

И. Клумова

Задача М602 решена в статье *А. Авраамова*, которая будет напечатана в одном из ближайших номеров.

М603. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x-y}{x^2+y^2} = 3, \\ y - \dfrac{x+3y}{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на y, второе — на x и сложим эти два уравнения. Получим

$$2xy + \frac{(3x-y)y-(x+3y)x}{x^2+y^2} = 3y$$

или

$$2xy-1=3y.$$

Отсюда $y \neq 0$. Поэтому

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2y}.$$

Подставим полученное соотношение во второе уравнение исходной системы; получим

$$y\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2y}\right)^2 + y^2\right] - \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2y}\right) - 3y = 0$$

или

$$4y^4 - 3y^2 - 1 = 0,$$

откуда $y^2 = 1$, то есть $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Л. Купцов

Ф604. *В условиях невесомости жидкость, помещенная в стеклянный цилиндрический сосуд с радиусом основания R_1, приняла форму, показанную на рисунке 1. Свободная поверхность жидкости имела форму сферы с радиусом R_0. Та же жидкость, помещенная в стеклянный сферический сосуд радиуса R_2, приняла форму, показанную на рисунке 2. Свободная поверхность жидкости была плоской. Определить высоту уровня жидкости в сферическом сосуде. Какую форму будет иметь жидкость в сферическом сосуде, если радиус сосуда больше R_2? меньше R_2?*

◆

Краевой угол, который образуют в точке соприкосновения трех сред поверхности этих сред (касательные к этим поверхностям в данной точке), определяется силами взаимодействиями между молекулами в этих средах и не зависит от силы тяжести. Поэтому краевой угол должен быть одним и тем же в невесомости и на Земле и именно он определяет форму поверхности жидкости вблизи точек соприкосновения трех данных сред (в нашем случае — жидкости, твердого тела и газа).

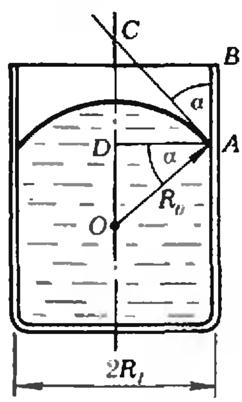


Рис. 1.

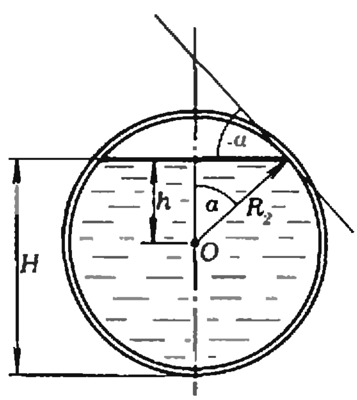


Рис. 2.

Из рисунков 1 и 2 видно, что

$$\cos\alpha = \frac{R_1}{R_0} \text{ и } \cos\alpha = \frac{h}{R_2}.$$

Отсюда находим $h = R_1R_2/R_0$. Следовательно, высота уровня жидкости в сферическом сосуде равна

$$H = h + R_2 = \frac{R_2}{R_0}(R_1 + R_0).$$

В сосудах с радиусами $R < R_2$ и $R > R_2$ уровни жидкости будут соответственно выше и ниже, чем в сосуде с радиусом R_2. В любом случае в точке соприкосновения трех сред краевой угол равен α.

В. Скороваров

Ф605. *Проволочный предохранитель перегорает, если напряжение на нем равно 10 В. При каком напряжении будет перегорать предохранитель, если его длину увеличить вдвое?*

Ответ на эту задачу очевиден — предельное напряжение на «длинном» предохранителе равно 20 В.

Рассмотрим более сложную задачу: при каком напряжении будет перегорать предохранитель, если его длину l увеличить в n раз, а диаметр d — в k раз.

Если напряжение U на предохранителе (и ток, идущий по нему) таковы, что температура проводника равна T (например, температура плавления), в проводнике выделяется количество теплоты

$$Q_1 = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{\varrho\frac{l}{s}} = \frac{\pi U^2 d^2}{4\varrho l}$$

(R — сопротивление, ϱ — удельное сопротивление проводника, $s=\pi d^2/4$ — площадь поперечного сечения). Окружающей среде отдается количество теплоты

$$Q_2 = \alpha S(T-T_{ср}) = \alpha\pi dl(T-T_{ср})$$

($S=\pi dl$ — площадь поверхности проводника, $T_{ср}$ — температура окружающей среды и α — коэффициент пропорциональности). При тепловом равновесии $Q_1=Q_2$, то есть

$$\frac{\pi U^2 d^2}{4\varrho l} = \alpha\pi\, dl(T-T_{ср}).$$

Отсюда найдем напряжение U на проводнике, при котором он нагревается до температуры T:

$$U = 2l\sqrt{\frac{\alpha\varrho(T-T_{ср})}{d}}.$$

При длине проводника $l_1=nl$ и диаметре проводника $d_1=kd$ температура проводника равна T при напряжении

$$U_1 = 2ln\sqrt{\frac{\alpha\varrho(T-T_{ср})}{kd}}.$$

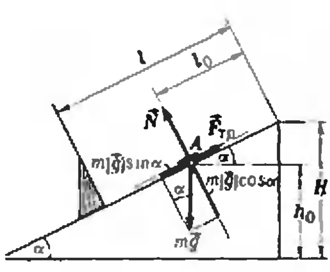
Таким образом,

$$U_1 = U\frac{n}{\sqrt{k}}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф606. *Шайба соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости с углом α. Коэффициент трения между шайбой и поверхностью наклонной плоскости изменяется с расстоянием l от вершины по закону $\mu=kl$ ($k=$const). На каком расстоянии от вершины надо поставить упор, чтобы после одного упругого соударения с упором шайба остановилась как можно выше?*



Пусть в точке A, находящейся на расстоянии l_0 от вершины наклонной плоскости, сила трения, действующая на шайбу, равна (см. рис.) $|\vec F_{тр}| = m|\vec g|\sin\alpha$, где m — масса шайбы. Поскольку в точке A коэффициент трения $\mu_A=kl_0$, в этой точке $|\vec F_{тр}|=\mu_A|\vec N| = kl_0 m|\vec g|\cos\alpha$, то есть

$$m|\vec g|\sin\alpha = kl_0 m|\vec g|\cos\alpha,$$

откуда

$$l_0 = \operatorname{tg}\alpha/k.$$

Нетрудно показать, что максимально возможная высота подъема шайбы после одного удара об упор — это высота h_0, соответствующая точке A. Чтобы после удара шайба остановилась в точке A, надо, чтобы при подъеме после удара шайба имела в точке A скорость, равную нулю.

Найдем, на каком расстоянии l от вершины наклонной плоскости надо установить упор, чтобы шайба после удара остановилась в точке A. Запишем закон сохранения энергии (см. рис.):

$$mgH = mgh_0 + F_{ср\,1}l + F_{ср\,2}(l-l_0). \qquad (*)$$

Здесь $F_{ср\,1}l$ — энергия, «потерянная» на преодоление трения на пути от вершины наклонной плоскости до упора; на этом участке среднее значение силы трения $F_{ср\,1}=klmg(\cos\alpha)/2$. $F_{ср\,2}(l-l_0)$ — энергия, затраченная на преодоление трения на пути от упора до точки A; на этом участке

$F_{\text{ср. }2} = k(l + l_0)mg(\cos\alpha)/2$. С учетом этого из (*) получаем

$$(H - h_0) = \frac{k}{2} l^2 \cos\alpha + \frac{k}{2}(l^2 - l_0^2)\cos\alpha.$$

Отсюда, учитывая, что $H - h_0 = l_0 \sin\alpha$, находим

$$l = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{k}}$$

В. Белонучкин

◆

Ф807. *Самолет летит по замкнутому маршруту ABC. Пункты A, B и C лежат в вершинах правильного треугольника. В каком случае время, затраченное на перелет, будет меньше: если ветер дует в направлении вектора $\vec{AB}$ или если ветер дует в направлении вектора $\vec{BA}$?*

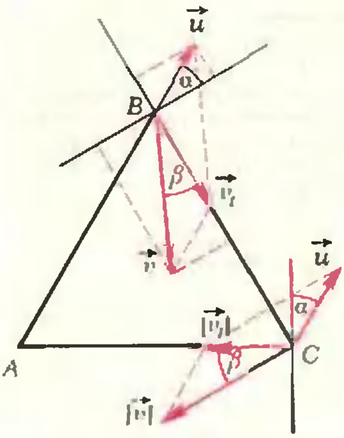


Рис. 1.

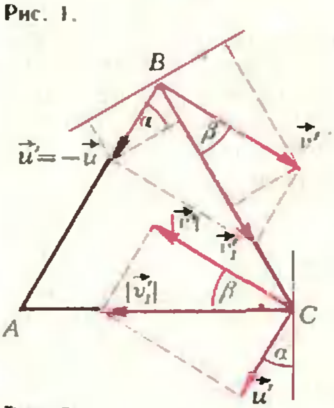


Рис. 2.

Обозначим l длину стороны треугольника ABC. Если скорость вектора равна u и он дует в направлении $\vec{AB}$, то вдоль вектора $\vec{AB}$ самолет летит со скоростью $u + v$ (где v — модуль скорости самолета) и затрачивает на перелет $A \to B$ время

$$t_1 = \frac{l}{u + v} = \frac{l}{v(1 + d)}, \text{ где } d = \frac{u}{v}.$$

Вдоль вектора $\vec{BC}$ самолет летит со скоростью $\vec{v_1} = \vec{v} + \vec{u}$ (рис. 1). Так как вектор $\vec{v_1}$ направлен вдоль вектора $\vec{BC}$, модуль вектора $\vec{v_1}$ равен сумме проекций векторов $\vec{v}$ и $\vec{u}$ на $\vec{BC}$, а сумма проекций этих векторов на ось, перпендикулярную $\vec{BC}$, равна нулю:

$$v_1 = v\cos\beta - u\sin\alpha,$$
$$v\sin\beta - u\cos\alpha = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\alpha = 30°$, получим

$$v_1 = v\sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}\cos^2\alpha} - u\sin\alpha = \frac{1}{2}v\sqrt{4 - 3d^2} - \frac{1}{2}d.$$

Такой же по модулю будет скорость на участке CA. Поэтому на перелет $B \to C \to A$ самолет затратит время

$$t_2 = \frac{2l}{v_1} = \frac{4l}{v\sqrt{4 - 3d^2} - dv}.$$

Полное время t перелета $A \to B \to C \to A$ равно $t_1 + t_2$.

Если ветер дует вдоль вектора $\vec{BA}$, то перелет $A \to B$ совершается за время

$$t_1' = \frac{l}{v - u} = \frac{l}{v(1 - d)}.$$

Скорость на участках BC и CA в этом случае (рис. 2) будет равна по модулю

$$v_1' = \sqrt{v^2 - \frac{3}{4}u^2} + \frac{1}{2}u = v\sqrt{1 - \frac{3}{4}d^2} + \frac{1}{2}dv,$$

и на перелет $B \to C \to A$ потребуется время

$$t_2' = \frac{2l}{v_1'} = \frac{4l}{v\sqrt{4 - 3d^2} + dv}.$$

Полное время t' перелета $A \to B \to C \to A$ равно в этом случае $t_1' + t_2'$. Отношение времен t' и t равно

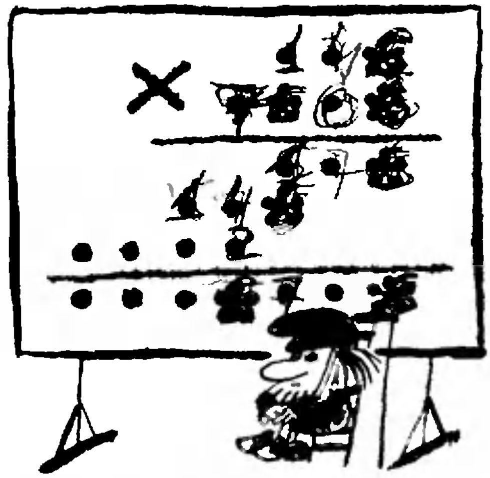
$$\frac{t'}{t} = \frac{\dfrac{1}{1 - d} + \dfrac{4}{\sqrt{4 - 3d^2} + d}}{\dfrac{1}{1 + d} + \dfrac{4}{\sqrt{4 - 3d^2} - d}}.$$

Проведя алгебраические преобразования, получим

$$\frac{t'}{t} = 1.$$

Н. Кушнир

«Квант» для младших школьников



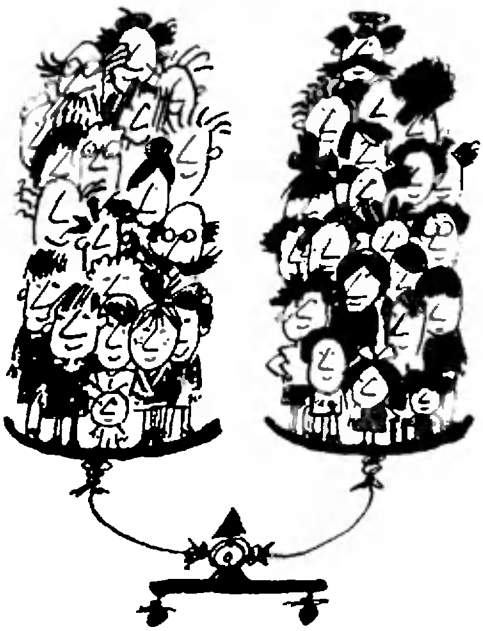
Задачи

1. В данном примере на умножение (см. рисунок) одна из цифр заменена звездочкой, а остальные — точками. Известно, что сумма цифр четырехзначного сомножителя равна 19. Восстановите пример.

2. В прямоугольном треугольнике на гипотенузе AB от вершины A отложим отрезок AD, конгруэнтный катету AC, а от вершины B — отрезок BE, конгруэнтный катету BC. Докажите, что длина отрезка DE равна диаметру окружности, вписанной в треугольник ABC.

3. Выпишем несколько первых степеней тройки: 3^1, 3^2, 3^3, ..., 3^8 (см. рисунок). Получаются числа, у которых в разряде десятков стоит четная цифра. Верно ли, что так будет всегда?

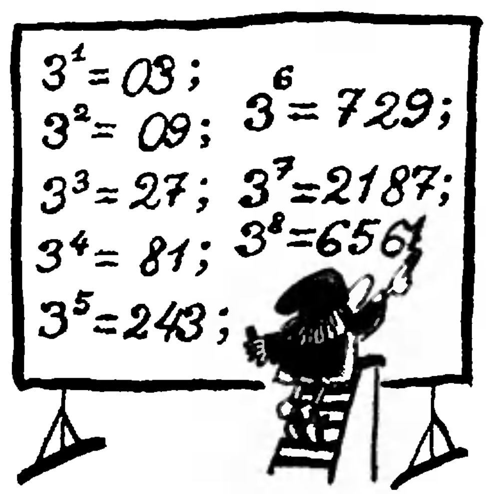
4. Доля блондинов среди голубоглазых больше, чем их доля среди всего населения. Верно ли, что доля голубоглазых среди блондинов больше, чем их доля среди всего населения?



5. Обозначим через $\overline{\underbrace{a...bcd}_{n}}$, n-значное число, у которого d единиц, c десятков, b сотен, а в старшем разряде стоит цифра a. Найдите трехзначное число $\overline{abc}$, для которого

$$(\overline{abc})^a=\overline{bc(a-1)bc}$$

(у пятизначного числа в правой части в разряде сотен стоит цифра $a-1$).



Эти задачи нам предложили
Ф. Бартенев, А. Майоров, И. Михалкович, А. Савин, А. Толпыго

И. Юфанова

Волшебная сказка с физическими вопросами

Жил старик с тремя сыновьями. На краю света жил. Кругом тишь, места непроходимые.

Выросли сыновья и просят отца отпустить их из родного дома. Хочется им по белу свету побродить, на людей посмотреть, уму-разуму поучиться.

Договорились братья путешествовать вместе: идти туда, куда каждый по очереди вести будет. Сначала старший вел всех на юг. Прошли братья 10 верст. Затем впереди пошел средний. Еще 10 верст прошли братья, но теперь уже на запад. Настала очередь младшему. Он прошел со своими братьями 10 верст на север. И оказались братья, к своему удивлению, ... в родном доме, откуда совсем недавно в путь отправились.

Где жил старик со своими сыновьями?

Вновь собрались братья в дорогу. Подошли к развилке трех дорог и пошли каждый своей дорогой. Условились через три года встретиться на том же месте.

Долго бродили братья по белу свету, разным ремеслам обучались да на дивности любовались. Вернулись в назначенный день домой и поведали о своих приключениях.

Первым речь повел старший брат:

«Еду я однажды по дороге и вижу поляну. Посреди огромная ель растет, а около нее белка резвится.

Волшебная, наверное. Поймать бы, думаю. Будет она песни петь да орешки с золотыми скорлупками грызть. А в этих орешках ядра — из чистого изумруда.

Сделал я шаг к дереву, а белка скок за ствол. Спряталась. Только мордочку с любопытными глазками показывает.

Обойду-ка, думаю, дерево, зайду к белке сзади да и поймаю ее.

Пошел я по круглой поляне, не приближаясь к ели. А белка, хитрющая, в противоположную сторону от меня движется. Да так в аккурат, что только глазки из-за ствола и видно.

Четыре раза я поляну обошел, а белку так и не поймал.»

Обошел ли старший брат белку хоть раз? Кто из них быстрее двигался? Что видела белка: стоял старший брат или двигался?

Продолжил рассказ средний брат:

«Однажды я весь день был в пути, а к вечеру, когда для человека, для зверя, для птицы настает время сна, прилег и быстро заснул.

Много ли, мало ли я спал, только разбудили меня шум и свист. Чувствую, братцы, по воздуху плыву. Понял я, что заснул на ковре-самолете и теперь лечу на нем. Обрадовался такому приключению. Да, видно, рановато.

Сначала никак не мог усесться. Свесил ноги вниз — сидеть удобно, привычно, но очень в ноги дует. Так в сторону относит, что они под острым углом к туловищу располагаются. Да и холодно очень.

Кое-как устроился, вытянув ноги вдоль ковра. А тут солнышко зашло. Еще больше похолодало, зуб на зуб не попадает.»

С чем можно сравнить полет среднего брата — с полетом аэростата или самолета? Как можно вновь увидеть закатившееся за горизонт Солнце? С какой скоростью должен лететь сказочный ковер-самолет, чтобы Солнце всегда обогревало его пассажиров?

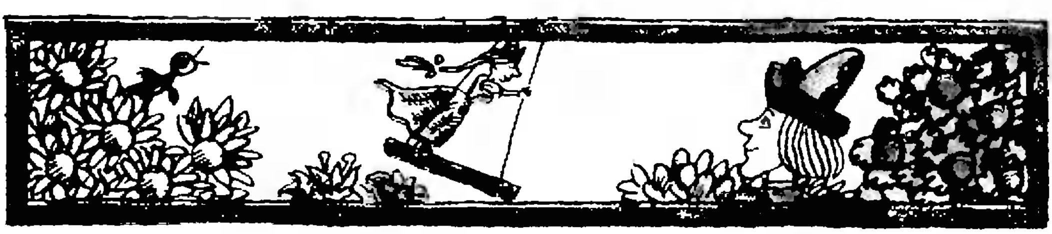
Последним поведал свой рассказ младший брат:

«Довелось мне, братцы, побывать в саду сказочной красоты. Цветов там видимо-невидимо. Гранатовые деревья точно красной краской выкрашены, столько на них плодов. Были там и яблони с золотыми плодами. Воздух кругом сладкий, душистый. Куда ни глянь, сидит соловей да песни распевает.

Но самой прекрасной была в том саду принцесса, дочь владельца сада. Да околдовал ее злой волшебник, превратил в уточку. Девицей-красавицей разрешил только на качелях качаться. Любила она это развлечение. Если качели движутся, на них она — девица. Как только останавливаются, в тот же миг оборачивается девица уточкой и улетает так быстро, что ее только и видели.

Прослышал я, что если долго смотреть на неподвижную принцессу, колдовство пропадет. Так я и сделал. Освободил от чар злого волшебника прекрасную принцессу, за что и получил вознаграждение.»

Как это удалось сделать младшему брату?



И. Габович

Предел функции

Понятие «предел функции» является одним из важнейших в школьном курсе математики. Через него определяются «непрерывность» и «производная».

Основное определение (§ 38 пособия «Алгебра и начала анализа 9») сформулируем двумя способами.

Сначала на «арифметическом» языке: число b называется *пределом функции f при x, стремящемся к a*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что при всех x, удовлетворяющих двойному неравенству*)

$$0<|x-a|<\delta, \qquad (1)$$

выполняется неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon. \qquad (2)$$

Чтобы сформулировать определение предела функции на «геометрическом» языке, введем термин, которого нет в школьном пособии. Как известно, *окрестностью* точки $a\in\mathbf{R}$ называется интервал вида $]a-\delta;\ a+\delta[$, где δ — произвольное положительное число. Назовем *проколотой окрестностью* точки $a\in\mathbf{R}$ ее окрестность, из которой выкинута («выколота») сама точка a, то есть «разорванное» множество вида $]a-\delta;\ a[\cup]a;\ a+\delta[$. Теперь определение предела функции может быть сформулировано так: число b называется *пределом функции f при x, стремящемся к a*, если для любой окрестности B точки b найдется такая проколотая окрестность A точки a, что $f(A)\subset B$ (рис. 1).

Таким образом, не требуется, чтобы неравенство (2) выполнялось и при $x=a$. Функция f в точке a может быть даже не определена — это ничуть не влияет на ее предел при x, стремящемся к a. Например, функция $\frac{x^2-9}{x-3}$ не определена при $x=+3$, но ее предел при $x\to+3$ существует.

Более общий пример: функция $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ всегда не определена при $\Delta x=0$, но ее предел при $\Delta x\to 0$ «часто» существует (он называется *производной* функции f в точке x_0).

Впрочем, «очень часто» неравенство (2) выполняется и при $x=a$; если при этом $b=f(a)$, функция f называется *непрерывной* в точке a.

Если утверждение вида

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \qquad (3)$$

доказывать исходя непосредственно из определения, надо для любого $\varepsilon>0$ найти соответствующее $\delta>0$ или, по крайней мере, доказать, что такое $\delta>0$ существует.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{7}}(3-2x)=\frac{19}{7}$.

Для этих «действующих лиц» $\left(f(x)=3-2x,\ a=\frac{1}{7},\ b=\frac{19}{7}\right)$ неравенство (2) принимает вид

$$\left|3-2x-\frac{19}{7}\right|<\varepsilon. \qquad (4)$$

Чтобы найти нужное δ, «раскроем» неравенство (4) и постараем-

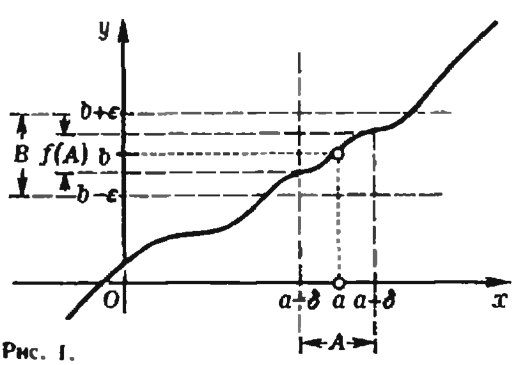


Рис. 1.

*) $|x-a|>0 \Leftrightarrow x\neq a$

ся «обнажить» x. Неравенство (4) равносильно неравенствам

$$\left|-2x+\frac{2}{7}\right|<\varepsilon,$$

$$-\varepsilon<-2x+\frac{2}{7}<\varepsilon,$$

$$-\frac{2}{7}-\varepsilon<-2x<-\frac{2}{7}+\varepsilon,$$

$$\frac{1}{7}+\frac{\varepsilon}{2}>x>\frac{1}{7}-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\frac{1}{7}-\frac{\varepsilon}{2}<x<\frac{1}{7}+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5)$$

Теперь «свернем» неравенство (5) и постараемся получить неравенство вида (1):

$$-\frac{\varepsilon}{2}<x-\frac{1}{7}<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|x-\frac{1}{7}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Мы достигли цели. Таким образом, при $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ из $0<\left|x-\frac{1}{7}\right|<\delta$ вытекает (4). В данном примере неравенство (2) = (4) верно и при $x=a$; в качестве δ можно, очевидно, взять любое число из $\left]0;\ \frac{\varepsilon}{2}\right]$.

Впрочем, второе замечание тривиально и носит общий характер: если для некоторого $\varepsilon_0>0$ годится некоторое $\delta_0>0$, то есть из

$$0<|x-a|<\delta_0 \qquad (6)$$

вытекает

$$|f(x)-b|<\varepsilon_0, \qquad (7)$$

то для этого $\varepsilon_0>0$ годится, разумеется, и любое $\delta\in]0;\ \delta_0[$: если $0<|x-a|<\delta$, то из $\delta<\delta_0$ следует (6), а значит, и (7).

Пример 2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to -2}\frac{5}{x}=-\frac{5}{2}$.

Неравенство (2) в данном случае имеет вид

$$\left|\frac{5}{x}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right|<\varepsilon. \qquad (8)$$

Пойдем опять по тому же пути. Неравенство (8) равносильно неравенствам

$$\left|\frac{5}{x}+\frac{5}{2}\right|<\varepsilon,$$

$$-\varepsilon<\frac{5}{x}+\frac{5}{2}<\varepsilon,$$

$$-\frac{5}{2}-\varepsilon<\frac{5}{x}<-\frac{5}{2}+\varepsilon. \qquad (9)$$

Чтобы достичь цели — «обнажить» x, нам надо почленно разделить 1 на каждую часть двойного неравенства (9); но делать это можно только в том случае, если все части неравенства имеют одинаковый знак, поскольку соответствующее свойство **числовых** неравенств гласит: *если $a<b$ и числа a, b имеют одинаковый знак* (короче: $ab>0$), *то* $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ (докажите это утверждение!). $-\frac{5}{2}-\varepsilon<0$. Поэтому нам надо, чтобы остальные две части неравенства (9) были отрицательными. Достаточно потребовать

$$-\frac{5}{2}+\varepsilon<0 \text{ или } \varepsilon<\frac{5}{2}.$$

Итак, пусть **сначала** $\varepsilon<\frac{5}{2}$ (заметьте это место — мы к нему еще вернемся). Тогда все части неравенства (9) отрицательны. Поэтому

$$\frac{1}{-\frac{5}{2}-\varepsilon}>\frac{x}{5}>\frac{1}{-\frac{5}{2}+\varepsilon},$$

$$\frac{5}{-\frac{5}{2}-\varepsilon}>x>\frac{5}{-\frac{5}{2}+\varepsilon}$$

$$\frac{5}{-\frac{5}{2}+\varepsilon}<x<\frac{5}{-\frac{5}{2}-\varepsilon}$$

$$\frac{10}{-5+2\varepsilon}<x<\frac{10}{-5-2\varepsilon}. \qquad (10)$$

x «обнажили». Теперь нам надо получить из (10) неравенство вида (1):

$$|x-(-2)|<\delta,$$

$$-\delta<x-(-2)<\delta,$$

$$-2-\delta<x<-2+\delta. \qquad (11)$$

Из (10):

$$-2+\frac{10}{-5+2\varepsilon}+2<x<-2+$$

$$+\frac{10}{-5-2\varepsilon}+2,$$

$$-2-\frac{4\varepsilon}{5-2\varepsilon}<x<-2+\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}. \qquad (12)$$

Пока еще неравенство (12) не вполне имеет вид (11). При $\varepsilon<\frac{5}{2}$

$$\frac{4\varepsilon}{5-2\varepsilon}>\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}.$$

Значит,

$$-2-\frac{4\varepsilon}{5-2\varepsilon} < -2-\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}. \qquad (13)$$

«Огрубим» неравенство (12):

$$-2-\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}<x<-2+\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}. \qquad (14)$$

Из (13) вытекает, что если x удовлетворяет неравенству (14), то он удовлетворяет и неравенству (12) (см. рис. 2). Но (14) имеет уже вид (11). Из (14)

$$|x-(-2)|<\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}.$$

Таким образом, если $\varepsilon<\frac{5}{2}$, то при $\delta=\frac{4\varepsilon}{5+2\varepsilon}$ из $0<|x-(-2)|<\delta$ вытекает (8).

Но нам ведь надо доказать, что для л ю б о г о $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, а мы пока это доказали только для $\varepsilon<\frac{5}{2}$. Однако, по существу, этого достаточно, потому что для $\varepsilon\geqslant\frac{5}{2}$ годится то же δ! В самом деле, пусть $\varepsilon_1\geqslant\frac{5}{2}$; возьмем произвольное $\varepsilon_2<\frac{5}{2}$ и $\delta_2=\frac{4\varepsilon_2}{5+2\varepsilon_2}$; по доказанному из

$$0<|x-(-2)|<\delta_2$$

вытекает $\left|\frac{5}{x}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right|<\varepsilon_2$;

но $\varepsilon_2<\frac{5}{2}\leqslant\varepsilon_1$; значит,

$$\left|\frac{5}{x}-\left(-\frac{5}{2}\right)\right|<\varepsilon_1.$$

Это замечание носит общий характер: оказывается, всегда можно искать δ не для всех $\varepsilon>0$, а для всех положительных ε, меньших любого выбранного нами положительного числа.

Разумеется, и в данном примере неравенство (2) = (8) верно при $x=a$.

П р и м е р 3. Докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

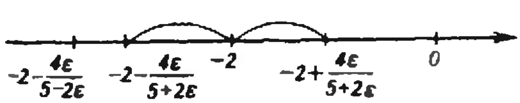


Рис. 2.

Неравенство (2) в данном случае имеет вид

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon,$$

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon. \qquad (15)$$

Если бы мы в этом примере сразу же пошли тем же путем, что и в предыдущих, мы бы не достигли цели: x нам бы «обнажить» не удалось. Поэтому начнем с того, что «огрубим» неравенство (15): поскольку $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$,

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|. \qquad (16)$$

Из (16) вытекает, что вместо (15) достаточно искать δ для неравенства $|x|<\varepsilon$. Поскольку в нашем случае неравенство (1) имеет вид $0<|x|<\delta$, ясно, что в качестве искомого δ можно взять ε.

В данном примере неравенство (2) = (15) при $x=a=0$, конечно, не верно: функция $x\sin\frac{1}{x}$ при $x=0$ не определена.

Запомните дважды примененный нами прием «огрубления» — он часто бывает полезным.

В рассмотренных нами примерах отыскание δ не вызвало больших затруднений. Однако для более сложных функций доказательство утверждения (3) в «лоб», прямым отысканием δ, обычно не удается. В таких случаях может помочь теория.

Приведем пример из «нешкольной» теории. Справедлива такая теорема: *если* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ *и существует* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *и*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Эта теорема называется *правилом Лопиталя.* По этому правилу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-\frac{1}{e-x}+1}=\frac{2}{1-\frac{1}{e}}=\frac{2e}{e-1}.$$

В. Матизен

Найдем ошибку

Решая задачи, абитуриенты и школьники часто получают ответы, ошибочность которых ясна опытному человеку с первого взгляда. Дело в том, что неправильность результата зачастую можно установить весьма простыми средствами, не решая задачу заново.

В этой заметке показаны простейшие способы быстрой проверки. Сразу оговоримся: ни один из них не дает стопроцентной гарантии. Но если в ответе содержится грубая ошибка, она будет выявлена с большой вероятностью. Кроме того, проверка гораздо полезнее того способа самоконтроля, которым, увы, единственно владеет большинство учащихся,— сверки с соседом. Итак, учитесь проверять себя сами!

1. Тождества и тождественные преобразования

Пусть требуется *упростить выражение*

$$f(x,y)=\sin^2\frac{x-y}{2}+\sin^2\frac{x+y}{2}-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\cos y.$$

Проведя выкладки

$$f(x,y)=$$
$$=\frac{1-\cos(x-y)}{2}+\frac{1-\cos(x+y)}{2}-(\cos x+\cos y)\cos y= \qquad f_1(x,y)$$
$$=1-\frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}-\cos x\cdot\cos y-\cos^2 y= \qquad f_2(x,y)$$
$$=1-\cos x\cdot\cos y-\cos x\cdot\cos y-\cos^2 y= \qquad f_3(x,y)$$
$$=\sin^2 y-2\cos x\cdot\cos y \qquad f_4(x,y)$$

вы получили некий ответ.

Подставим в полученное равенство $f(x,y)=f_4(x,y)$ «самую простую» пару $(0;\ 0)$. Получим $f(0,0)=0$, $f_4(0,0)=-2$. Значит, в преобразованиях где-то вкралась ошибка. Чтобы найти место, где она допущена, запустим в цепочку $f(x,y)=\ldots=f_4(x,y)$ «меченый атом»: будем подставлять пару $(0;\ 0)$ последовательно в $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $f_3(x,y)$. Уже $f_1(0,0)=-2\neq f(0,0)$. Значит, вы совершили ошибку на первом же шаге. Попробуем «поймать» ее. При переходе от $f(x,y)$ к $f_1(x,y)$ были использованы два тождества

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$
$$2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=\cos x+\cos y.$$

Первое выдерживает $\alpha=0$, второе при подстановке пары $(0;0)$ дает $0=2$. Вот где ошибка — была написана неверная формула!

Конечно, проверка не укажет правильную формулу, если вы даже приблизительно не помните, как она выглядит. Но если припомнить, что правая часть искомой формулы находится среди следующих:

$$\sin x-\sin y,\ \sin y-\sin x,\ \sin x+\sin y,$$
$$\cos x-\cos y,\ \cos y-\cos x,$$

то проверкой несложно выделить истинную. Все эти формулы обращаются в верные равенства при подстановке точки $(0;0)$, но уже точку $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}\right)$ «выдерживает» только последняя. Она и будет верной.

Конечно, хорошо подготовленный школьник обязан знать стандартные формулы и безошибочно пользоваться ими. К сожалению, практика экзаменов показывает — ошибки «на ровном месте» происходят слишком часто; поэтому приемы самоконтроля, хотя и не являются абсолютными, очень полезны в подобных задачах.

Иногда сомнение в правдоподобности тождества возникает по соображениям симметрии. Допустим, что при разложении на множители многочлена

$$P(x, y, z) = (x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$$

вы получили

$$3(x+y)(x+z)(y-z); \qquad P_1(x, y, z)$$

вы тогда должны сразу сообразить, что ошиблись: в многочлене $P(x, y, z)$ переменные x, y, z равноправны (то есть он не меняется при любых перестановках переменных*): $P(x,y,z)=P(x,z,y)=P(z,x,y)=\ldots$), а в многочлене $P_1(x, y, z)$ — нет: $(P_1(x, y, z)=-P_1(x, z, y))$.

2. Уравнения, системы уравнений

Решив уравнение, попробуйте подставить в него полученные ответы и, если вычислить затруднительно, хотя бы прикинуть, равны ли обе его части. Это часто полезно независимо от того, требуется ли формальная проверка для отсеивания лишних корней. Скажем, если при решении уравнения

$$\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$$

вы получили корни 5 и 170, прикидка сразу же покажет, что при $x=170$ левая часть явно больше правой и найденное значение корня $x=170$ ошибочно. Можно и из общих соображений установить, что данное уравнение может иметь не более одного корня. В самом деле, функция $f(x)=\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}$ возрастает на всей области определения, то есть при $x\geqslant 3$ (объясните, почему, не вычисляя производную), и в силу этого может принять значение 5 не более одного раза. Если же немного знать свойства непрерывных монотонных функций («Алгебра и начала анализа 10», п. 84), то из того, что $f(3)=\sqrt{7}<5$, а $f(10)=2\sqrt{14}>5$, можно заключить, что между 3 и 10 обязательно найдется такое x_0, что $f(x_0)=5$.

---

*) Математики называют многочлены (и даже функции), обладающие этим свойством, *симметрическими*.

Заметить ошибку в решении системы уравнений часто позволяют наблюдения за симметрией. Например, система

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 \end{cases}$$

не меняется при перестановке неизвестных и при одновременной замене x на $-x$ и y на $-y$ (проверьте!). Поэтому, если в найденное вами решение войдет пара (2; 1) и не войдет хотя бы одна из пар (1; 2), (−2; −1), (−1; −2), то вы где-то потеряли решение.

Аналогичным образом можно заметить, что вместе с решением $(x_0; y_0)$ системы

$$\begin{cases} x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=a, \\ x^2+\frac{1}{x^2}+y^2+\frac{1}{y^2}=b \end{cases}$$

ей будут удовлетворять также пары $\left(x_0; \frac{1}{y_0}\right)$, $\left(\frac{1}{x_0}; y_0\right)$, $\left(\frac{1}{x_0}; y_0\right)$, $\left(\frac{1}{x_0}; \frac{1}{y_0}\right)$, $(y_0; x_0)$, $\left(y_0; \frac{1}{x_0}\right)$ и $\left(\frac{1}{y_0}; \frac{1}{x_0}\right)$.

3. Неравенства

Пусть требуется *решить неравенство* $\sqrt{7+x}\geqslant 5-x$.

«Ответ»: [2; 9].

Для проверки начнем просматривать действительную ось, двигаясь из «минус бесконечности» в «плюс бесконечность». Прежде всего заметим, что «большие» отрицательные числа не входят в множество решений: для них подкоренное выражение в левой части нашего неравенства отрицательно и неравенство не определено (проверьте, подставив $x=-10^2$; -10). При увеличении x функция $7+x$ возрастает, а функция $5-x$ убывает. Начиная с $x=-7$, мы входим в область определения неравенства. Подставим несколько удобных для расчета обеих частей значений, например $x=-6$; -3; 0. Видим, что при этих значениях левая часть все еще меньше правой. Подставим нижнюю границу нашего ответа, то есть $x=2$. Равенство! При дальнейшем увеличении x правая часть убывает, левая возрастает —

следовательно, дальнейшие значения x входят в множество решений. Подставим в неравенство правую границу $x=9$. Получаем $4>-4$. Неравенство верное, но озадачивающее. Почему при такой разнице между частями неравенства ответ показывает, что дальше решений нет? Подставим «большое» положительное число, например $x=10^3$. Неравенство явно справедливо! Легко заключить, что потерян весь промежуток $]9;\ +\infty[$: ведь при любом $x>9$ правая часть отрицательна, а левая положительна, и при $x>9$ неравенство верно. Наша проверка не только обнаружила неверность ответа, но и позволила указать верный ответ.

(Получить $[2;\ 9]$ в качестве множества решений можно, например, так:

$$\sqrt{7+x}>5-x;\ 7+x>(5-x)^2;\ x^2-11x+18<0;\ 2<x<9.$$

Чтобы уловить ошибку, воспользуемся меченой точкой, не входящей в ответ и удовлетворяющей исходному неравенству, например $x=18$. Уже подстановка во второе неравенство показывает, что на первом же шаге, при возведении в квадрат, мы потеряли корни.)

Итак, получив ответ, часто бывает целесообразно «пройтись» по всей числовой оси: может быть, упущен целый промежуток; может быть, в ответ вкрались явно не удовлетворяющие неравенству числа. Обязательно подставьте «большие» и «малые» значения: это и просто, и полезно. Особое внимание обратите на границы полученных в ответе промежутков: *это, как правило, или границы области определения неравенства или значения, при которых достигается равенство.*

Эффективным и наглядным способом контроля нередко является графический. Если график обеих частей неравенства построить несложно — сделайте это!

4. Геометрические задачи

Простейшая проверка геометрической формулы основана на том, что обе ее части должны иметь одинаковую размерность. Складывать можно лишь величины одной размерности; при этом сумма имеет ту же размерность, что и слагаемые. Размерность произведения равна сумме размерностей сомножителей, размерность частного — разности размерностей делимого и делителя. Константам приписана нулевая размерность, длине — размерность 1. Площадь и объем имеют размерность 2 и 3 соответственно, тригонометрические функции — нулевую. В силу перечисленных свойств размерности невозможны, скажем, такие «формулы»:

$$l=\frac{a+b}{a-b},\quad V=a^2\cdot\frac{b}{a+c},$$

$$\sin\varphi=\frac{a^2+b^2}{S^2},\quad S=a^2+\frac{b}{c},$$

где l, S, V — длина, площадь и объем, a, b, c — длины. В первых трех формулах не совпадают размерности левой и правой части (один и ноль, три и два, ноль и минус два); в правой части четвертой формулы складываются величины размерностей 2 и 0.

Столь же просто использовать для контроля симметрию. Дело в том, что симметрия в условиях задачи должна влечь за собой симметрию ответа. Например, если в задаче требуется найти расстояние от точки внешнего касания двух окружностей с радиусами a и b до их общей касательной, то в формуле для искомого расстояния a и b должны быть равноправны, то есть формула не должна меняться от их перестановки. Поэтому из трех ответов:

$$x=\sqrt{a^2+2b^2},\quad x=b\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right),$$

$$x=\frac{2ab}{a+b}$$

первый явно не годится; про второй сразу ничего не скажешь — его следует преобразовать к симметричному виду, который и дан в третьей формуле.

Точно так же еще до решения задачи следует заметить, что объем тетраэдра с равносторонним основанием и двугранными углами при основании α, β, γ представляет собой симметрическую функцию от α, β, γ

(определение дано в сноске на с. 44) и что в формулу для медианы m_c треугольника со сторонами a, b, c лишь a и b должны входить одинаковым образом (объясните, почему!).

Можно проверять ответ и подстановкой частных значений. Например, в приведенной задаче о расстоянии до касательной результат геометрически очевиден: искомое расстояние равно радиусу. Это же дает и формула. Почти не требует расчетов проверка в предельных случаях, когда одна из переменных стремится к границе области определения. В рассматриваемой задаче при $a \to 0$ искомое расстояние также должно стремиться к 0; то же показывает и формула $x = ab/(a+b)$.

Чтобы проверить задачу с численными данными, нужно представлять себе примерную величину ответа. Скажем, если требуется найти длину биссектрисы l_a треугольника со сторонами $a=7$, $b=6$, $c=5$, то ответы $\sqrt{50}$ и $3/\sqrt{7}$ явно неверны: первый слишком велик, а второй слишком мал.

В заключение сформулируем основные приемы оперативной проверки, которыми мы пользовались:

1. Подстановка частных значений.
2. Исследование вблизи границ.
3. Наблюдения за симметрией.

Постарайтесь их освоить. Для этого вам предлагается ряд задач. К каждой приведено несколько ответов, из которых правилен только один. Найдите его.

1. Упростить выражение $3+4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$;

а. $4\cos^4\alpha$. б. $8\cos^3\alpha$. в. $8\cos^4\alpha$. г. $8-6\,\mathrm{tg}^4\alpha$.

2. Решить уравнение $\sqrt{1+\log_2 x} + \sqrt{4\log_4 x - 2} = 4$;

а. $\{-8\}$. б. $\{8\}$. в. $\{4;\ 129\}$. г. $\{8;\ 0{,}01\}$.

3. Решить неравенство $\sqrt{24-2x-x^2}/x < 1$;

а. $]-\infty;\ -6[\cup]0;\ 4]$. б. $]-6;\ 0[$.
в. $[-6;\ 0[\cup]2;\ 4]$. г. $[-6;\ 0[\cup]3;\ 4]$.

4. В трапеции с основанием a, b найти длину отрезка, заключенного между боковыми сторонами, параллельного основанию и проходящего через точку пересечения диагоналей.

а. $\dfrac{2ab}{a+b}$. б. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. в. $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

г. $\dfrac{a+2b}{2}$. д. $\dfrac{ab}{a+b}$.

5. В основании пирамиды — равносторонний треугольник со стороной a. Боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углами α, α, β. Найти объем пирамиды.

а. $\dfrac{a^3}{8(\mathrm{ctg}\,\alpha + 2\,\mathrm{ctg}\,\beta)}$. б. $\dfrac{a^3\cos 2\beta}{8(\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta)}$.

в. $\dfrac{a^3\sin 2\alpha}{4\sin\beta}$. г. $\dfrac{a^3}{8(\mathrm{ctg}\,\beta + 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha)}$.

6. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды перпендикулярно ему проведена плоскость. Найти площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если длина стороны основания пирамиды равна 2 см, длина бокового ребра равна 8 см.

а. $\dfrac{\sqrt{118}}{5}$ см^2. б. $\dfrac{64\sqrt{37}}{31^2}$ см^2.

в. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{10}$ см^2. г. $\dfrac{2}{\sqrt{210}}$ см^2.

7. В двух системах указаны некоторые решения. Не решая системы, выпишите некоторые другие решения:

А. $\begin{cases} |x| + xy + |y| = 11, \\ x^2|y| + y^2|x| = 30 \end{cases}$

$\{(5;\ 1),\ (-2;\ -3)\}$.

Б. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 2, \\ \dfrac{1}{xy} - xy = \dfrac{9}{20} \end{cases}$

$\left\{\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{4};\ \dfrac{-5+\sqrt{5}}{4}\right),\ \left(\dfrac{2}{5};\ 2\right)\right\}$.

Поправка

В статье «Перемещения пространства» («Квант», 1980, № 8) на с. 7 в формулировке теоремы 2 и в последнем абзаце — по вине автора пропущен один тип перемещений: композиция поворота вокруг прямой и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной этой прямой.

Заочная школа программирования

Урок 10: Программирование задач в полярной системе координат

Материал этого урока предназначен для учащихся 8—10 классов. Для учащихся младших классов этот материал считается не обязательным.

О полярной системе координат

Для определения положения точки на плоскости существуют различные системы координат. Наряду с системой, известной вам из школьных учебников (она называется *декартовой*), для решения многих задач используют *полярную* систему координат.

Полярные координаты точки на плоскости — два числа, определяющие положение этой точки относительно некоторой фиксированной точки O, называемой *полюсом*, и некоторого фиксированного луча OX, называемого *полярной осью*.

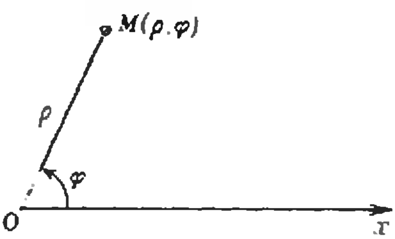


Рис. 1.

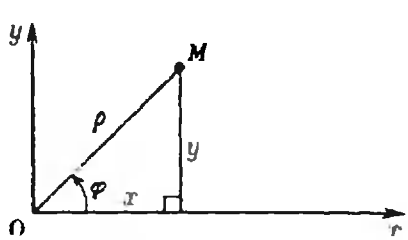


Рис. 2.

Первая координата ρ (*полярный радиус*) точки M равна $|OM|$ (следовательно, $\rho \geqslant 0$); вторая координата φ (*полярный угол*) есть угол, на который надо повернуть полярную ось до совпадения с лучом OM; для полюса величина полярного угла не определена (рис. 1).

Полярные координаты имеют преимущество перед декартовыми при исследовании и построении графиков некоторых кривых, например спиралей. Велико значение полярных координат в описании одного из наиболее распространенных видов движения — вращения.

При переходе от декартовой системы координат XOY к полярной с полюсом в начале координат и полярной осью, совпадающей с осью абсцисс OX (рис. 2), координаты точек преобразуются по формулам

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

при обратном преобразовании — по формулам

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi.$$

Спираль Архимеда

Допустим, что нужно построить кривую, которую описывает точка, движущаяся с постоянной скоростью v по лучу, вращающемуся около полюса O с постоянной угловой скоростью ω. Уравнение этой кривой в полярных координатах имеет вид

$$\rho = a\varphi, \qquad (1)$$

где $a = \frac{v}{\omega}$. Кривая (1) известна под названием *спирали Архимеда* (рис. 3).

Для построения спирали Архимеда на ЭВМ средствами графической системы Шпага удобно воспользоваться процедурой ПОЛЯР («Квант», 1980, № 1, с. 56).

Проверьте самостоятельно, что программа (2), написанная на языке Рапира, рисует спираль Архимеда (границей цикла ПОКА выбрана величина $5\times 2\pi$, обеспечивающая ри-

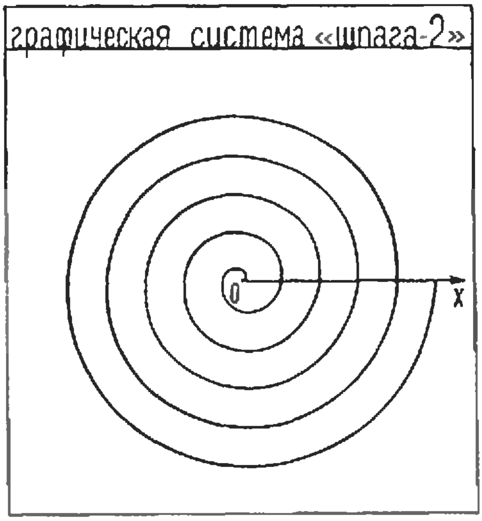


Рис. 3.

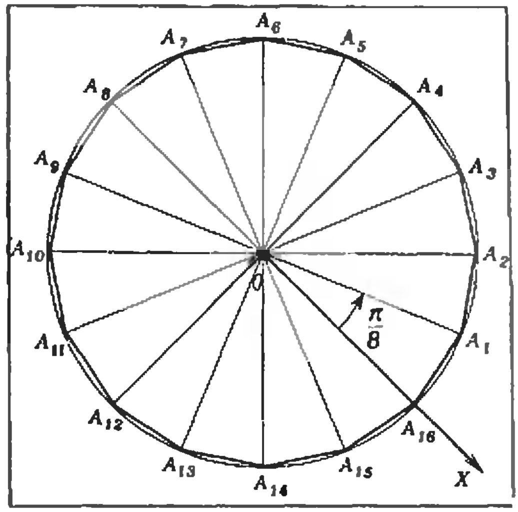


Рис. 4.

сование пяти витков спирали). Не забудьте, что при использовании процедур ПОДВОД и ЛУЧ первый диаметр играет роль полярного радиуса, а второй — полярного угла.

```
P(100,100); H(50,50);
.ПОЛЯР; 2—>A; 0—>ФИ;
3.1416—>ПИ; П(0,0);                (2)
ПОКА ФИ<10*ПИ::
  ФИ+0.01—>ФИ;
  Л(A*ФИ,ФИ)
ВСЕ;
 КОНЕЦ;
```

Задание 10.1. *Составьте программу для построения кривых, описываемых уравнениями:*

а) $\varrho = a\,(1+\cos\varphi)$ — *кардиоида,*

б) $\varrho = \frac{a}{\varphi}$ — *гиперболическая спираль.*

Семейство «цветочков»

На второй странице обложки воспроизведены сделанные на ЭВМ рисунки семейства «цветочков». Уравнение данного семейства кривых в полярных координатах имеет вид

$$\varrho = A \sin B\varphi. \qquad (3)$$

Задание 10.2.

1) *Что определяет коэффициент A?*

2) *В каком порядке вырисовываются отдельные лепестки?*

3) *Как изменится рисунок, если в уравнении (3) заменить* $\sin B\varphi$ *на* $|\sin B\varphi|$*?*

4) *Как связано количество лепестков со значением коэффициента B?*

Рассмотрите отдельно случаи, когда B четно и когда B нечетно.

5) *Как нужно организовать цикл, чтобы:*

а) *рисовать «цветочки» в том порядке, в каком они изображены на обложке (восстановите программу)?*

б) *изобразить в семействе «цветочков» только те из них, которые имеют нецелые значения параметра B?*

в) *нарисовать семейство «цветочков» только с целыми значениями B?*

(Подписи под рисунками программировать не надо.)

Правильный 16-угольник

В олимпиаде по программированию («Квант», 1980, № 3) были предложены две задачи, которые решаются проще, если использовать полярную систему координат.

Первая из них (задача 3) формулируется так: *составить программу для изображения правильного 16-угольника, в котором проведены все диагонали, не проходящие через центр.*

Рассмотрим полярную систему координат с полюсом в центре многоугольника O и полярной осью OX, направленной вдоль луча OA_{16} (рис. 4).

Найдем полярные координаты вершин данного многоугольника. Первая координата (полярный радиус) у всех вершин одинакова и равна радиусу описанной окружности R, а вторая координата (полярный угол) вычисляется по формуле $\varphi_K = (\pi/8)*K$, где K — номер вершины.

Чтобы нарисовать требуемую фигуру, нужно вершину с номером N ($1<N<16$) соединить со всеми вершинами, номера которых больше N, кроме вершины с номером $(N+8)$ (ведь именно отрезок, соединяющий вершины с номерами N и $N+8$, проходит через центр). Если каждую вершину N мы соединяли бы со всеми остальными вершинами, то каждый отрезок рисовался бы дважды.

Придавая параметру R различные значения, будем получать подобные правильные 16-угольники.

Параметрами процедур могут быть любые арифметические выражения. Например, в процедурах ПОДВОД и ЛУЧ с помощью выражений предварительно вычисляются координаты соответствующей точки. В процедурах РАМКА и НАЧАЛО выражения участвуют в качестве параметров для того, чтобы обеспечить расположение правильного многоугольника строго в середине поля рисунка. По процедуре ДИАГ с параметром K вершина с номером N будет соединена с вершиной номер K.

```
ПРОЦ ДИАГ К;
  П(R, N*ПИ/8);
  Л(R, К*ПИ/8);
КНЦ;
```

Окончательная программа имеет вид:

```
50—>R;
Р(2*R+50,2*R+50);
Н(R+25,  R+25);  3.1416—>ПИ;
ПОЛЯР; 1—>N;
ПОКА N<16::
  1+N—>К;
  ПОКА К<16::
    ЕСЛИ К/=N+8 ТО
      ДИАГ (К); К+1—>К
      ВСЕ;
      N+1—>N
  ВСЕ;
 КОНЕЦ;
```

Результат работы этой программы — рисунок 5.

Задание 10.3. *Напишите процедуру, рисующую правильный N-угольник.*

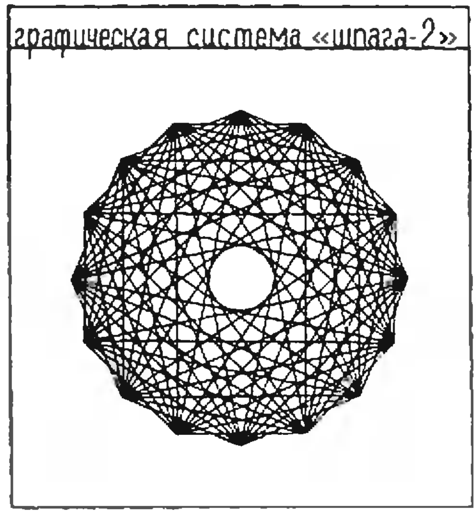


Рис. 5.

Задача о выпуклом многоугольнике

В задаче 8а олимпиады по программированию рассматривался выпуклый многоугольник, заданный множеством M пар координат всех вершин многоугольника; пары были записаны в виде кортежей, задача формулировалась так: *построить по множеству M кортеж K, в котором вершины многоугольника расположены в том порядке, в каком они встречаются при обходе контура многоугольника по часовой стрелке, начиная с самой «нижней» вершины (если таких вершин две, начиная с самой левой из них).*

Решение этой задачи непосредственно в декартовых координатах выглядит довольно громоздко и его трудно обосновать, не выходя за рамки школьного курса и Заочной школы программирования. Если же выбрать подходящую полярную систему, например поместить полюс в начальную точку обхода, выбранную в соответствии с условиями задачи, а полярную ось направить по горизонтали вправо, то принцип решения становится очевидным: при обходе по контуру многоугольника, начиная со второй точки полярный угол строго убывает (докажите это!). Программа, выполняющая построение такого кортежа, состоит из четырех последовательных частей, которые удобно оформить в виде отдельных процедур:

1) отыскание начальной вершины (это процедура почти ничем не отличается от программы из задачи 1а олимпиады);

2) перевод координат всех вершин в полярную систему по приведенным выше формулам (с учетом переноса начала);

3) построение кортежа пар координат, расположенных в порядке убывания полярного угла (сравните с задачей 1б);

4) перевод координат точек кортежа обратно в декартову систему и их выдача на печать с сохранением их порядка.

Задачи олимпиады 8б и 8в удобно решать в полярной системе координат, полюс которой совпадает с точкой T.

Н. Юнерман

Полезное начинание

По Постановлению ЦК КПСС и Совета Министров СССР с 1969 года при высших учебных заведениях открыты подготовительные отделения для рабочей и сельской молодежи, демобилизованных воинов Советской Армии. Сам факт существования подготовительных отделений предполагает, что их слушатели имеют определенные пробелы в знаниях; поэтому первоочередная задача подготовительных отделений состоит в том, чтобы ликвидировать эти пробелы, помочь слушателям восстановить утраченные знания. Многие слушатели кончали средние школы до введения новых программ, следовательно, подготовительные отделения должны помочь им в кратчайшие сроки овладеть новым материалом, необходимым для дальнейшего успешного обучения в вузе.

Для успешного решения этих задач подготовительные отделения должны иметь широкий арсенал высококачественных учебных пособий, специально написанных для их слушателей.

К сожалению, до сих пор большинство учебных пособий, которыми пользуются подготовительные отделения, в частности, по математике, являются либо пособиями по самообразованию, либо пособиями по подготовке в вузы, написанными по старой программе.

Хорошо известна та коренная переработка, которой подверглись школьные программы по математике, и естественно, что отсутствие полноценных учебных пособий по курсу математики отрицательно сказывается на работе подготовительных отделений.

В 1979 году издательство «Высшая школа» выпустило в свет учебное пособие А. Мордковича*) по математике, специально написанное для подготовительных отделений.

Эта книга состоит из 11 глав. Первая глава, которая называется «Действительные числа», является вводной. Кроме материала, связанного с действительными числами, она содержит элементы теории множеств, элементы математической логики. Здесь же идет речь о простейших преобразованиях целых рациональных выражений, о линейных уравнениях с одной и двумя переменными, о линейных неравенствах с одной переменной. Основное назначение этой главы — ввести читателя в круг основных идей алгебры на простейшем уровне, дать ему материал для практических занятий, не дожидаясь более подробного и тщательного развития теории, которое делается в следующих главах.

Вторая глава посвящена преобразованиям алгебраических выражений (целых, дробных, иррациональных), а четвертая — решению алгебраических уравнений (целых, дробных, иррациональных) и систем таких уравнений. Третья глава посвящена функциям. Понятие функции вводится в книге на основе понятия соответствия между множествами. Определяются основные свойства функций (четность, периодичность, монотонность), а затем изучаются конкретные функции (линейная, степенная, тригонометрические). Четко и аккуратно вводится трудное понятие обратной функции и на его основе изучаются обратные тригонометрические функции и степенная функция с любым рациональным показателем. В этой главе подробно рассматриваются различные преобразования графиков, а заканчивается глава параграфом о графическом решении уравнений, неравенств и систем уравнений.

Пятая глава называется «Основные формулы тригонометрии и их применение». Она построена следующим образом: формулируется теорема сложения, а затем из формул

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

выводятся все остальные формулы тригонометрии. Полученные формулы применяются для преобразования выражений, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции, для доказательства тригонометрических тождеств и решения тригонометрических уравнений.

Шестая глава посвящена неравенствам. Здесь излагается метод интервалов для решения рациональных неравенств с одной переменной, вводятся понятия системы и совокупности неравенств, рассматриваются неравенства и системы неравенств с двумя переменными. Отдельный параграф посвящен изложению различных способов доказательства неравенств.

Седьмая глава называется «Последовательности». Она содержит основные понятия, связанные с последовательностями, от способов задания последовательностей до предела последовательности, содержит вопросы, связанные с арифметической и геометрической прогрессиями. Отдельный параграф посвящен методу математической индукции.

Восьмая глава содержит изложение вопросов, связанных с понятиями непрерывной функции в точке и предела функции.

Девятая глава содержит элементы дифференциального и интегрального исчисления, десятая посвящена изучению показательной и логарифмической функции и решению соответствующих уравнений и неравенств. По-

---

*) А. Мордкович. Алгебра и начала анализа. М., «Высшая школа», 1979.

следняя, одиннадцатая глава, содержит элементы комбинаторики.

Уже этот перечень показывает, что в книге изложен весь основной теоретический материал, соответствующий школьному курсу алгебры и начал анализа и необходимый для изучения высшей математики в вузе. Книга написана в соответствии с современной школьной программой по математике, причем так, что ее с успехом могут использовать как те слушатели подготовительных отделений, которые знакомы с нынешней школьной программой, так и те, которые закончили школу давно и учились по старой программе.

Книга написана хорошим доступным языком и вместе с тем на достаточно высоком научно-методическом уровне.

Но к сожалению, в книге имеются и существенные недостатки.

При изучении курса математики нельзя ограничиться только изложением теоретического материала. Все теоретические положения должны сопровождаться большим количеством тщательно продуманных упражнений, которые должны разъяснять теоретические положения и закреплять их в памяти учащихся. Однако упражнения, приведенные в книге, не полны, и зачастую настолько искусственны и громоздки, что их решения вызывают добавочные трудности, не связанные с изучаемым материалом. Необходимо отметить также большое количество ошибок в ответах. Вызывают возражения и отдельные методические установки автора.

1. Понятие непрерывности функции в точке, свойства непрерывных функций и классификация точек разрыва изложены до понятия предела функции в точке и теории пределов. Целесообразность такого построения вызывает сомнения. Так как понятие одностороннего предела не вводится, то нельзя всерьез говорить и о классификации точек разрыва, не говоря уже о том, что этот вопрос не входит в программу средней школы.

2. Не всегда удачна терминология, предлагаемая автором: «полупарабола», «НОЗ», «график уравнения», «аркфункции», «кривая знаков», «плюс дробно-рациональной функции» и т. д.

3. Нецелесообразно помещение отдельной главы связанной с комбинаторикой, т. к. этот раздел выпал из школьной программы.

Однако в целом книга получилась удачной.

Думается, что основной своей цели — помочь рабочей молодежи повторить школьный курс математики и подготовиться к последующему обучению в вузе — автору удалось достичь.

Книга сразу завоевала популярность у читателей. Практически весь 180-тысячный тираж книги быстро разошелся, в результате чего даже многие подготовительные отделения вузов не успели ее приобрести. Это делает актуальным вопрос о переиздании книги.

В заключение хотелось бы порекомендовать автору при подготовке второго издания ликвидировать указанные выше недостатки (в первую очередь решить вопросы с упражнениями и пересмотреть методику изложения теории пределов).

Н. Розов, М. Смолянский

Повторение опыта Майкельсона и Морли

Все выводы специальной теории относительности основаны на том, что скорость света в вакууме не зависит ни от скорости движения источника, ни от скорости движения наблюдателя. Она является, как говорят, фундаментальной постоянной.

Этот важный факт был впервые проверен экспериментально американским физиком Майкельсоном в 1881 году, а в 1886 году опыт был проведен еще раз, уже совместно с Морли, тоже американским ученым. С тех пор опыт Майкельсона и Морли, повторяемый неоднократно, вошел в историю физики как один из важнейших опытов*).

Майкельсон и Морли обнаружили, что скорость распространения света вдоль направления движения Земли вокруг Солнца и перпендикулярно к этому направлению одна и та же. Говоря точнее, из опытов можно было заключить, что отношение «продольной» скорости света $v_{\parallel}$ (по движению Земли) к «поперечной» скорости $v_{\perp}$ (перпендикулярной к движению Земли) отличается от единицы на очень малую величину. Так, из опытов, проделанных в последние годы, следовало, что

$$\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} = 1 \pm 10^{-5}.$$

Недавно два физика — Брилле из Франции и Холл из США — построили новую установку для проведения опыта Майкельсона и Морли, в которой источником света является лазер. Им удалось значительно увеличить точность эксперимента и получить, что

$$\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} = 1 \pm 10^{-15}.$$

На сегодняшний день этот опыт представляет собой самую точную проверку основного постулата специальной теории относительности.

Я. Смородинский

*) Об опыте Майкельсона и Морли можно прочитать, например, в учебнике по физике для 10 класса (см. §93).

Всероссийская олимпиада школьников

С 24 по 27 марта 1980 года в Калинине, Курске, Уфе и Иркутске проходил заключительный этап VI Всероссийской олимпиады по математике и физике.

Для проведения Всероссийской олимпиады при Министерстве просвещения РСФСР был создан Оргкомитет, который, как и в прошлом году, возглавил известный советский математик академик В. С. Владимиров.

Всероссийская олимпиада проводится в четыре этапа: первый этап — школьные олимпиады; второй — районные (городские); третий — республиканские (АССР), краевые и областные; четвертый — зональные олимпиады.

В четвертом этапе принимают участие по одной команде (из трех школьников восьмых — десятых классов) от АССР, краев, областей, специализированных школ-интернатов при Московском, Ленинградском и Новосибирском университетах. (Команды Москвы и Ленинграда в четвертом этапе участия не принимают.) Команды составляются из победителей третьего этапа. Кроме них в зональных олимпиадах участвуют победители заключительных этапов предыдущих Всесоюзной и Всероссийской олимпиад, получившие дипломы I и II степени, а также победители конкурса журнала «Квант».

В этом году конкурсное задание четвертого этапа по математике состояло из 5 задач, на решение которых отводилось 4 часа. Кроме того, всем участникам было предложено программированное задание, составленное методической комиссией Министерства просвещения СССР. Задание включало 10 вопросов по школьной программе, к каждому из которых прилагался набор из 5 ответов (см. «Квант», 1980, № 9, с. 47). Школьники должны были выбрать правильный ответ.

На этом этапе наиболее успешно выступили учащиеся специализированных школ-интернатов № 45 при ЛГУ, № 18 при МГУ, № 165 при НГУ, представители школ Башкирской и Татарской АССР, Красноярского и Приморского краев, Белгородской, Вологодской, Иркутской, Кемеровской, Московской, Пермской и Ульяновской областей.

Конкурсное задание четвертого этапа по физике включало 4 теоретические задачи (на решение которых отводилось 4 часа) и 2 экспериментальные задачи (на их выполнение давалось 3 часа). Все предложенные задачи оказались для школьников посильными. С каждой задачей справились не менее 10 участников.

Ниже приводятся задачи заключительного этапа по математике и физике и фамилии призеров Всероссийской олимпиады.

Математика

8 класс

1. Группу туристов решили рассадить по автобусам так, чтобы в каждом автобусе было одинаковое количество пассажиров. Сначала в каждый автобус сажали по 22 человека, однако оказалось, что при этом не удается посадить одного туриста. Когда же один автобус уехал, то в оставшиеся автобусы все туристы сели поровну. Выяснить, сколько первоначально было автобусов и сколько туристов в группе, если известно, что в каждый автобус помещается не более 32 человек.

2. Расположим $2n$ точек на отрезке AB симметрично относительно середины отрезка. Какие-то n из них назовем красными, остальные — синими. Докажите, что сумма расстояний от всех красных точек до точки A равна сумме расстояний от всех синих точек до точки B.

3. $ABCDEH$ — правильный шестиугольник, M — середина отрезка CD, K — середина отрезка DE, O — точка пересечения отрезков AM и BK. Докажите, что площади треугольника ABO и четырехугольника $MDKO$ равны, и найдите величину угла между прямыми AM и BK.

4. Сколько различных чисел встречается в последовательности

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right],\ \left[\frac{2^2}{1980}\right],\ \left[\frac{3^2}{1980}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{1980^2}{1980}\right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x?

5. Из произвольной точки M описанной около треугольника ABC окружности проведены перпендикуляры MH и MK к прямым AB и AC соответственно (точки H и K лежат соответственно на прямых AB и AC). Для какой точки M длина отрезка HK будет наибольшая?

9 класс

1. Можно ли все натуральные числа от 1 до 30 записать в таблицу, имеющую 5 строк и 6 столбцов, так, чтобы:

а) суммы чисел в каждом столбце были одинаковы?

б) суммы чисел в каждой строке были одинаковы?

2. Укажите все натуральные числа n, для которых число $2^8+2^{11}+2^n$ является квадратом натурального числа.

3. Каждая вершина выпуклого $(2n+1)$-угольника окрашена в один из трех цветов так, что любые две соседние вершины окрашены в разные цвета. Докажите, что $(2n+1)$-угольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы вершины каждого треугольника были окрашены в различные цвета.

4. Даны натуральные числа m и n, причем $n \leqslant 100$. При обращении дроби $\frac{m}{n}$ в десятичную ученик получил после запятой на некотором месте последовательные цифры 167. Докажите, что ученик допустил ошибку в вычислениях.

5. На плоскости расположены два правильных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (вершины указаны по часовой стрелке) так, что середины сторон BC и B_1C_1 совпадают. Найдите:

а) величину угла между $[AA_1]$ и $[BB_1]$;

б) отношение длин $|AA_1|:|BB_1|$.

10 класс

1. Для каждой вершины тетраэдра строится точка, симметричная этой вершине относительно центра противолежащей грани. Найдите отношение объема тетраэдра, вершинами которого являются построенные точки, к объему исходного тетраэдра. (Центром грани называется точка пересечения ее медиан.)

2. Город в плане представляет собой выпуклый многоугольник. Его улицами являются все диагонали многоугольника, а перекрестками — пересечения улиц (но не вершины многоугольника). В городе введено трамвайное движение. Каждый маршрут проходит по своей улице от одного ее конца до другого с остановками на всех перекрестках этой улицы и в ее концах. Известно, что на каждом перекрестке пересекаются лишь две улицы и по крайней мере по одной из них проходит трамвайный маршрут. Докажите, что с любого перекрестка можно проехать на трамвае на любой другой перекресток, сделав не более двух пересадок.

3. Докажите, что среди чисел 2^1-1, 2^2-1, 2^3-1, ..., $2^{n-1}-1$, где n — нечетное число, хотя бы одно делится на n.

4. Найдите все функции f, областью значений которых являются числовая ось R и которые для любых $a, b, p \in$ R удовлетворяют неравенству

$$f(pa+(1-p)b) \leqslant pf(a)+(1-p)f(b).$$

5. На плоскости даны три квадрата $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ (вершины квадратов перечислены против часовой стрелки), причем A_1 совпадает с A, C_2 совпадает с C. Докажите, что отрезки D_1D_2 и BM, где M — середина $[B_1B_2]$, взаимно перпендикулярны, причем $|D_1D_2|$ вдвое длиннее $|BM|$.

Решения задач будут опубликованы в журнале «Математика в школе». Мы рекомендуем нашим читателям попробовать решить их самостоятельно.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. На рисунке 1 представлен график зависимости проекции скорости точки, движущейся прямолинейно, от времени. На какое максимальное расстояние от начального положения отклонялась точка за это время?

2. На рисунках 2, *а* и *б* изображены курс корабля и границы области возбуждаемого им волнения на двух участках пути. Известно, что на первом участке течения нет. Направление течения на втором участке показано синей стрелкой. Определите скорость течения, если скорость корабля относительно Земли одинакова на обоих участках и ее модуль равен 18 км/ч.

3. При каком соотношении между сопротивлениями r_1, r_2, r_3 и r_4 резисторов выполняется равенство $R_{12}=R_{34}$? Резисторы собраны по схеме, показанной на рисунке 3.

4. Два полярника решили выпить кофе. Выпилив кусок льда массой 1 кг, они положили его в кастрюлю, а кастрюлю поставили на плитку мощностью 1,2 кВт. Когда получившаяся вода нагрелась до 30°С, 0,5 л воды отлили для других полезных нужд. Оставшаяся вода закипела через 20 мин после того, как кастрюлю со льдом поставили на плитку. Определите КПД плитки, если первоначальная температура льда была —40°С, его удельная теплоемкость 2100 Дж/(кг·К), удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг. Парообразованием пренебречь.

9 класс

1. Невесомый тонкий стержень длиной L с закрепленным наверху маленьким массив-

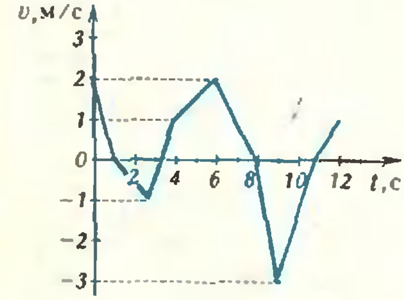


Рис. 1.

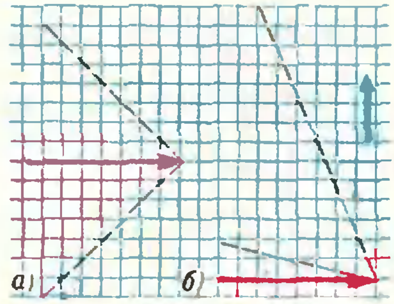


Рис. 2.

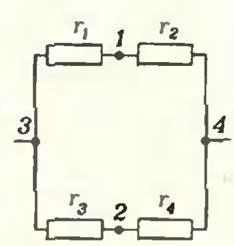


Рис. 3.

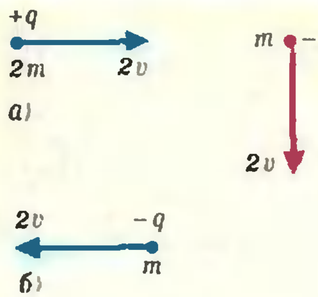


Рис. 4.

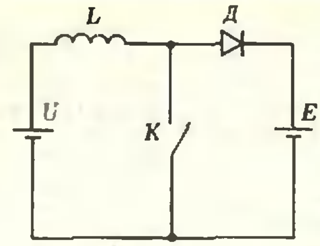


Рис. 5.

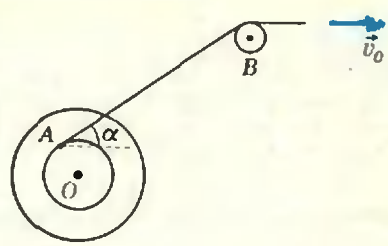


Рис. 6.

ным шариком находится в положении неустойчивого равновесия на жесткой, очень шероховатой горизонтальной поверхности. После легкого толчка он начинает падать. Определите вертикальную и горизонтальную проекции скорости шарика в момент его удара о поверхность.

2. Идеальный газ сжимают от большего начального объема до меньшего конечного, причем процесс проводится в две стадии. В каком случае от газа получат большее количество теплоты, если вести процесс: а) сначала при постоянном давлении, а потом при температуре, пропорциональной квадрату объема; б) сначала при температуре, пропорциональной квадрату давления, а потом при постоянном объеме? В обоих случаях начальная температура газа равна конечной.

3. Два тела массами $2m$ и m несут разноименные, но равные по величине электрические заряды. В некоторый момент времени тела движутся со скоростями, указанными на рисунке 4, *а*. В этот момент включается медленно меняющееся внешнее однородное электрическое поле. Сразу после выключения поля скорость тела массой m стала такой, как указано на рисунке 4, *б*. Какова в этот момент скорость тела массой $2m$? Величину v можно считать малой по сравнению со скоростью света.

4. Поплавок, изготовленный из однородного материала, имеет форму чечевицы — тела, ограниченного двумя сферическими поверхностями радиусом R. Толщина чечевицы $h<2R$. Масса чечевицы m_1. В поплавок вдоль оси симметрии на всю толщину воткнута тонкая спица длиной $l>h$ и массой m_2. Устойчиво ли положение поплавка, когда он плавает на поверхности воды спицей вверх? Считать, что в жидкость погружена лишь меньшая часть чечевицы.

10 класс

1. Тонкое массивное кольцо подвешено на трех невесомых нерастяжимых вертикальных нитях одинаковой длины. Точки прикрепления нитей к кольцу отстоят друг от друга на равных расстояниях. Как изменится период малых крутильных колебаний кольца, если в центр кольца поместить при помощи невесомых спиц небольшой груз той же массы, что и кольцо?

2. Для подзарядки аккумулятора с ЭДС $\mathscr{E}=12$ В от мощного источника напряжения $U=5$ В собрана схема из катушки индуктивностью $L=1$ Гн, диода $Д$ и прерывателя K, который периодически замыкается и размыкается на одинаковые промежутки времени $\tau_1=\tau_2=0{,}01$ с (рис. 5). Определите средний ток зарядки аккумулятора. Внутренние сопротивления аккумулятора и источника тока, сопротивления замкнутого прерывателя и диода в прямом направлении считать пренебрежимо малыми.

3. Нить, намотанная на катушку, выбирается через блок B с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ (рис. 6). При этом катушка без проскальзывания катится по горизонтальной поверхности. Определите зависимость модуля скорости центра катушки O от угла α, образуемого нитью с горизонтом. Внешний и внутренний радиусы катушки равны R и r соответственно.

4. Плоская разомкнутая рамка вращается в однородном вертикальном магнитном поле вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью ω. Магнитное поле меняется по закону $|\vec{B}|=|\vec{B}_0|\sin\omega t$. Определите частоту возникающей в рамке ЭДС индукции.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Определите плотность поваренной соли ($NaCl$).

Оборудование: весы без разновесов, два стакана, сосуд с водой, мензурка, поваренная соль.

2. Определите коэффициент трения ученической линейки о тело цилиндрической формы.

Оборудование: тело цилиндрической формы, линейка деревянная с делениями, кусок пластилина, карандаш.

9 класс

1. Определите плотность тела.

Оборудование: тело с плотностью, большей плотности воды, сосуд с водой, резиновый шнур, гиря известной массы, миллиметровая бумага, штатив с двумя лапками.

2. Определите сопротивление школьного амперметра. Рассчитайте и изготовьте шунт для расширения шкалы амперметра в 5 раз.

Оборудование: 2 учебных лабораторных амперметра, источник постоянного тока (4 В), медный провод, реостат, провода, масштабная линейка.

10 класс

1. Определите емкость конденсатора.

Оборудование: источник переменного тока, конденсатор известной емкости C, конденсатор неизвестной емкости C_x, высокоомные головные телефоны, реохорд, соединительные провода.

2. Определите индуктивность катушки.

Оборудование: источник постоянного тока (4 В), амперметр лабораторный, катушка индуктивности (дроссельная катушка), стальной сердечник, диод, конденсатор известной емкости, вольтметр, соединительные провода, ключ.

Призеры Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Касимов Н. (Казань, с. ш. № 131), *Котовец И.* (Новороссийск, с. ш. № 40), *Матвеев К.* (Новосибирск, с. ш. № 74), *Савкин А.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 9 классам —

Бережной Д. (Казань, с. ш. № 131), *Бураго Д.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ), *Гринчук М.* (Москва, ФМШ № 18 при МГУ), *Дрясова Н.* (Ангарск, с. ш. № 10), *Фомин Д.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 10 классам —

Артюшкин И. (Пенза, с. ш. № 16), *Келарев А.* (Свердловск, с. ш. № 141), *Корошнов А.* (Москва, ФМШ № 18 при МГУ), *Лихачев Д.* (Владивосток, с. ш. № 1), *Магадиев Б.* (Уфа, с. ш. № 114), *Мегрецкий А.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ), *Павлющик С.* (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Матюшов С. (Вологда, с. ш. № 29), *Плисс О.* (Владивосток, с. ш. № 23), *Спивак А.* (Стерлитамак, с. ш. № 10), *Ходоровский В.* (Нововоронежский, с. ш. № 1);

по 9 классам —

Аралкин А. (Новокузнецк, с. ш. № 11), *Балашов А.* (Махачкала, с. ш. № 8), *Качарманов А.* (Белорецк, с. ш. № 14), *Матвеев А.* (Ульяновск, с. ш. № 5), *Пяшов П.* (Дубна Московской обл., с. ш. № 9), *Хомич С.* (Ангарск, с. ш. № 10);

по 10 классам —

Боричев А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ) *Капустин В.* (Барнаул, с. ш. № 3), *Меденников Е.* (Ульяновск, с. ш. № 5), *Стадниченко С.* (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Ивлев В. (Железногорск-Илимский, с. ш. № 4), *Малышев В.* (Волгоград, с. ш. № 131), *Пронин Д.* (Горький, с. ш. № 36), *Ухов В.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 9 классам —

Беспалов А. (Горький, с. ш. № 40), *Габдуллин Р.* (Москва, ФМШ № 18 при МГУ), *Крупнов В.* (Горький, с. ш. № 40), *Осоедов А.* (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ), *Семенченко М.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 10 классам —

Брюков М. (Камышин, с. ш. № 5), *Голобоков А.* (Москва, ФМШ № 18 при МГУ), *Лебедянцев С.* (Куйбышев, с. ш. № 135), *Овсянников Д.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ), *Печкин Н.* (п. Архара Амурской обл., с. ш. № 1), *Пивоваров В.* (Красноярск, с. ш. № 10), *Светлов М.* (Пермь, с. ш. № 9).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Гордиенко А. (Ульяновск, с. ш. № 60), *Крюков А.* (Улан-Удэ, с. ш. № 14), *Пироженко А.* (Мытищи, с. ш. № 25), *Сюньков С.* (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —

Богаевский И. (Калининград Московской обл., с. ш. № 17), *Кащеев А.* (Братск, с. ш. № 9), *Пименов А.* (Москва, ФМШ № 18 при МГУ), *Смирнов А.* (Курган, с. ш. № 28);

по 10 классам —

Долганов А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ), *Ишикаев С.* (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ), *Китаев А.* (Воронеж, с. ш. № 58), *Ляпин Р.* (Уфа, с. ш. № 39), *Ратников Ф.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ), *Шикалов В.* (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Министерство просвещения РСФСР наградило грамотами учителей, которые подготовили учащихся, занявших три первых места на заключительном этапе олимпиады.

О. Овчинников, С. Резниченко, К. Шалимова, Г. Яковлев

XI праздник юных математиков в Батуми

В восьмом номере нашего журнала за этот год мы рассказали о Празднике юных физиков. В этом номере мы расскажем о Празднике юных математиков.

Первый праздник юных математиков был проведен в Батуми одиннадцать лет назад по инициативе преподавателя математики батумской средней школы № 7 М. И. Жгенти. Из года в год рос интерес к Празднику и расширялись состав и география его участников. В настоящее время в Празднике принимают участие школьники и математики из многих городов нашей страны.

Для проведения Праздника Министерство просвещения Аджарии создало оргкомитет, возглавляемый заместителем министра. В состав оргкомитета вошли батумские математики, учителя средних школ, представители общественных организаций.

Много сил и энергии для проведения Праздника приложили Батумский горком КП Грузии, Аджарский обком и Батумский горком ЛКСМ Грузии, Министерство просвещения и Совет профсоюзов Аджарии, Аджарское отделение общества «Знание», ученики школы № 7, возглавляемые своей замечательной учительницей М. И. Жгенти.

Мы надеемся, что такие праздники, очень полезные школьникам, будут организовываться и в других городах нашей страны.

С 4 по 10 ноября 1979 года в Батуми проходил XI традиционный праздник юных математиков. На Праздник съехались 13 делегаций — около 170 школьников 6—10 классов из Тбилиси, Сухуми, Рустави, Кутаиси, Баку, Киева и Москвы, а также юные математики из ПТУ № 24 Ленинграда.

В программу Праздника входили научная конференция школьников, математический КВН, вечер занимательной математики, а также развлекательная часть — поездки по окрестностям Батуми, экскурсии в музеи, встречи с батумскими школьниками.

На торжественном открытии Праздника выступил председатель оргкомитета Праздника заместитель министра просвещения Аджарской АССР И. Шерваншидзе. Он пожелал ребятам успешно выступить на конференции, победить в состязании веселых и находчивых, подружиться и хорошо отдохнуть.

На конференции учащиеся 6—10 классов прочитали около 40 докладов, тематика которых была весьма разнообразной. Несколько докладов были посвящены теории графов (Г. Вагобов из 46 школы Баку, Ю. Скуратовский из 208 школы Киева и А. Дьячков из 19 школы Москвы). Интересную серию докладов по

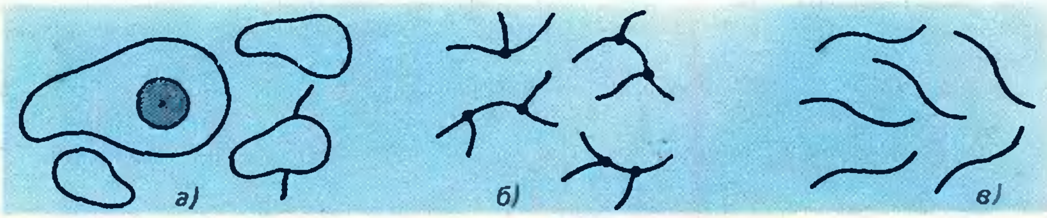


Рис. 1.

теории чисел подготовили шестиклассники и семиклассники из математического кружка при Тбилисском дворце пионеров (М. Малазония, З. Дидбаридзе, З. Джанджгава, М. Бегашвили, Д. Турашвили). Три доклада представили восьмиклассники М. Ашкалова, Н. Гогличидзе и Д. Дургарян из 96 школы Тбилиси (см. с. 60—61). Киевлянин Ян Брегман рассказал о построении сечений на проекционных чертежах многогранников в n-мерном пространстве, ученик 91 школы Москвы М. Концевич — о системах линейных разностных уравнений, А. Горинский из той же школы — об одном свойстве чисел вида $\frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, ученик ФМШ при МГУ С. Беспамятных — о том, что нечетные совершенные числа должны иметь не менее четырех различных простых делителей.

Шесть докладов были отмечены оргкомитетом и жюри Праздника как лучшие, а их авторы были награждены грамотами и ценными подарками.

Пожалуй, самым сложным из этих докладов был доклад Л. Новикова из московской школы № 91, рассказавшего о доказанной им теореме высшей алгебры о некоторых общих свойствах колец*).

В докладе Елены Гавениной из школы № 46 Баку наглядно и доступно рассказывалось о применении сложных методов динамического программирования к решению экономических задач.

Большой интерес вызвал доклад П. Ахметьева из московской школы № 57. Хорошо известно, что на плоскости можно расположить не более чем счетное множество*) непересекающихся фигур, каждая из которых имеет внутренние точки (то есть точки, входящие в фигуру вместе с некоторой окрестностью — рис. 1, а). То же самое верно и для фигур, составленных из линий и имеющих точки, из которых выходит три или больше линии (см. рис. 1, б). П. Ахметьев доказал следующую замечательную теорему: *если располагать на плоскости непересекающиеся фигуры, конгруэнтные данной фигуре Ф, представляющей собой произвольным образом «изогнутый» отрезок (рис. 1, в), то расположение на плоскости более чем счетного множества таких фигур возможно тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий — либо существуют точка O и число $\varepsilon > 0$ такие, что все фигуры $R_O^{\varphi}(\Phi)$, где $0 < \varphi < \varepsilon$, попарно не пересекаются, либо существует параллельный перенос $\vec{a}$ такой, что все фигуры $(\lambda\vec{a})(\Phi)$, где $0 < \lambda < 1$, тоже попарно не пересекаются* (*рис. 2*). Нетрудно

*) О кольцах смотри статью А. Бельского и Л. Садовского в «Кванте», 1974, № 2.

*) Бесконечное множество называется счетным, если все его элементы можно занумеровать натуральными числами; пример счетного множества — рациональные числа, пример несчетного множества — все действительные числа (см. «Алгебра и начала анализа 9», п. 18, а также раздел «Бесконечные множества» в пособии «Факультативный курс — Избранные вопросы математики 7—8»).

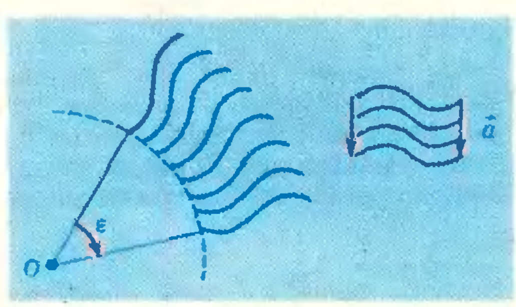


Рис. 2.

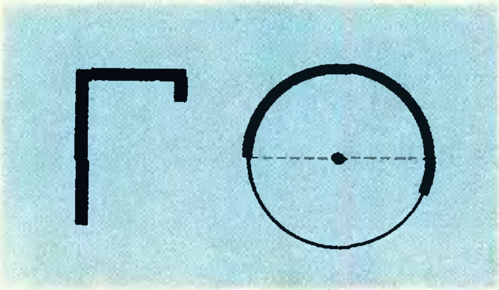


Рис. 3.

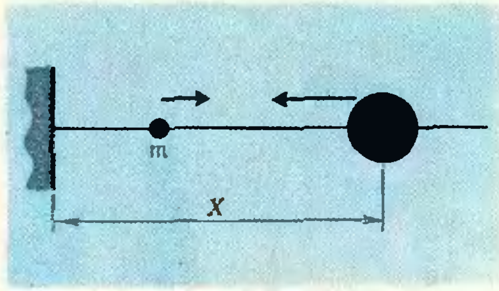


Рис. 4.

проверить, что эти условия не выполняются для дуг, больших 180°, или для буквы «Г» (рис. 3), так что на плоскости нельзя расположить более чем счетное множество непересекающихся фигур, конгруэнтных указанным фигурам.

Десятиклассники М. Шайхеев и И. Бессонов из ФМШ при МГУ рассказали о задачах, связанных с движением по прямой двух шаров различных масс m_1 и m_2, абсолютно упруго сталкивающихся друг с другом.

В докладе М. Шайхеева рассматривалось движение на отрезке $[0;l]$ оси Ox с упругим отскоком от «стенок» — концов отрезка. Если обозначить координаты шариков (считающихся точечными) через x_1 и x_2 и ввести вспомогательные координаты $z_1=\sqrt{m_1}x_1$, $z_2=\sqrt{m_2}x_2$, то одновременному движению шариков будет отвечать движение точки A (z_1, z_2) на координатной плоскости Oz_1z_2 такое, что все время $0<x_1<$ $<x_2<l$, то есть $0<z_1/\sqrt{m_1}<z_2/\sqrt{m_2}<$ $<l$. Эти неравенства задают на плоскости треугольник T, и законы упругого соударения (то есть законы сохранения импульса и энергии) получают интересную геометрическую интерпретацию: точка A движется внутри треугольника T с постоянной по величине скоростью, отражаясь от его сторон по биллиардному закону (угол падения равен углу отражения)*). Докладчик применил эту конструкцию к исследованию периодичности движений. Отметим, что общий критерий периодичности движений для такой системы пока не известен.

В докладе И. Бессонова «Одномерная термодинамика» рассматривалась модель идеального газа, состоящего из одного атома — шарика массы m, движущегося по прямой между неподвижной стенкой и «поршнем» — шаром массы $M \gg m$ (рис. 4). Когда поршень сближается со стенкой, за счет его энергии кинетическая энергия атома m увеличивается («газ нагревается»), но затем начинает уменьшаться, отталкивая поршень. Игорь вывел аналоги уравнений газового состояния $PV=RT$ и адиабатического процесса $PV^\gamma=\text{const}$ для этой модели, исходя из кинематических соображений и законов сохранения, используя, опять-таки, сведение движения шаров m и M к биллиарду внутри некоторого угла на плоскости Oz_1z_2. Роль объема V играет расстояние x между поршнем и стенкой, роль давления P — средняя по времени величина импульса, которым обмениваются шары m и M при соударениях; показатель адиабаты γ оказывается равным 3.

Очень интересный доклад «Модель Изинга» сделал девятиклассник В. Фок из школы № 91 Москвы. Модель Изинга была предложена еще в 1925 г. для изучения структуры ферромагнетиков. Володя рассказал решение задачи о расположении магнитных моментов в ферромагнитных доменах при различных значениях параметров модели и о фазовых переходах, при которых проявляются магнитные свойства ферромагнетиков. Хотя модели Изинга посвящена обширная литература, эта задача, поставленная проф. Р. Л. Добрушиным, в литературе не встречается.

*) См. задачу 1 в статье «Арифметика и геометрия столкновений» («Квант», 1978, № 4).

Большинство докладов произвело хорошее впечатление не только своим содержанием, но и удачным изложением.

Как и на предыдущих праздниках, большой интерес участников и многочисленных зрителей вызвал математический КВН. Силы команд были настолько близки, что первое место поделили две команды: 208 школа Киева и 91 школа Москвы; второе место заняла команда 46 бакинской школы, а третье поделили сразу три команды: 7 школа Батуми, 19 школа Москвы и ФМШ № 18 при МГУ. В конкурсе капитанов победу одержал москвич М. Концевич.

Участникам КВН были предложены интересные задачи. Попробуйте и вы решить некоторые из них:

1°. *Решите уравнение* $ШИШ^{И} = ШАБАШ$. *(Здесь буквы* А, Б, И, Ш *нужно заменить цифрами так, чтобы получилось верное равенство.)*

2°. *Имеется* 23 *монеты достоинством* 1, 2, 3 *или* 5 *копеек, составляющие в сумме* 48 *копеек. Есть ли среди этого набора монет двухкопеечная монета?*

3°. (Предлагалась на конкурсе капитанов.) *На плоскости задано конечное множество точек. Играют двое. За один ход можно соединить линией любые две точки, причем так, чтобы из каждой точки выходило не более двух линий. Линии не должны пересекаться. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.*

Заметим, что в последней задаче капитаны не сумели найти стратегию, которая приводит к выигрышу. Может быть, это удастся сделать вам.

Участники праздника не только хорошо поработали, но и хорошо отдохнули. Они совершили экскурсию в Ботанический сад, побывали в дельфинарии. 7 ноября ребята были гостями на праздничной демонстрации, и посетили краеведческий музей и музей Революции.

Встреча юных математиков надолго запомнится всем ее участникам как светлый и радостный праздник творчества и дружбы ребят разных союзных республик.

Б. Гейдман, Б. Давидович, А. Земляков

* * *

Три доклада на Батумском празднике

За активное участие в Празднике юных математиков подпиской на «Квант» на 1981 год награжден ряд школ (см. «Квант» № 9). Среди них — тбилисская школа № 96. Эта школа — не математическая, а обычная средняя школа. При школе создан музей математики, работает математический кружок, школьники выпускают математический журнал. Доклады восьмиклассников этой школы (руководители команды — учителя математики Л. А. Штейнгарц и О. Э. Шамилов) были очень хорошо и тщательно оформлены. Краткое изложение этих докладов, присланное Л. А. Штейнгарцем, мы предлагаем вашему вниманию.

Разрезание фигур на конгруэнтные части

Будем говорить, что фигура F *разрезана на части* A *и* B, если $A \cup B = F$ и $A \cap B = \varnothing$ (аналогично определяется разрезание на три части, на четыре части и т. д.).

На рисунке 1 прямая разрезана на две к о н г р у э н т н ы е части (A — объединение «красных» отрезков без левых концов, B — объединение «синих» отрезков без левых концов). Прямую легко разрезать на любое число конгруэнтных частей.

На две конгруэнтные части можно разрезать луч (как с началом, так и без начала), окружность, синусоиду, плоскость и угол.

А вот отрезок на две конгруэнтные части разрезать нельзя (предположим противное; тогда A отображается на B центральной симметрией или параллельным переносом; с помощью теоремы Вейерштрасса о существовании предела можно прийти к противоречию).

Нельзя также разрезать на две конгруэнтные части круг и квадрат.

(Докладчик сказал, что ему неизвестен способ, как узнать по фигуре, можно ли ее разрезать на две конгруэнтные части.)

Д. Дургарян

Рис. 1.

Необычные шары

Если между элементами a, b множества M определить расстояние $\rho(a, b)$ так, чтобы выполнялись три а к с и о м ы:

1) $\rho(a, b) \geqslant 0$,
   $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;
2) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;
3) $\rho(a, b) \leqslant \rho(a, c) + \rho(c, b)$

(см. п. 4 пособия «Геометрия 6—8»), то множество M с введенным понятием расстояния называется *метрическим пространством.*

В метрическом пространстве шар определяется «как в школе» (§ 62 пособия «Геометрия 9—10»): шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in M$ — это множество $\{x \in M \mid \rho(a, x) \leqslant r\}$.

П р и м е р 1. Определим расстояние между двумя клетками шахматной доски наименьшим числом ходов, достаточным для того, чтобы л а д ь е й попасть из одной клетки в другую. Легко проверить, что все аксиомы расстояния выполняются — множество клеток шахматной доски стало метрическим пространством.

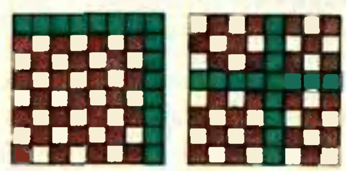


Рис. 2.

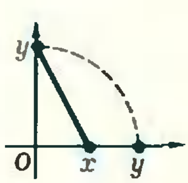


Рис. 3.

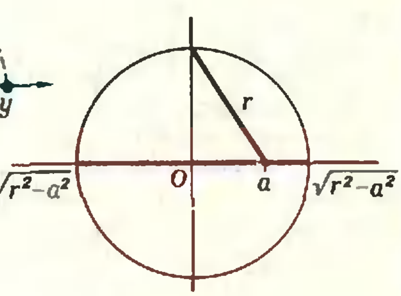


Рис. 4.

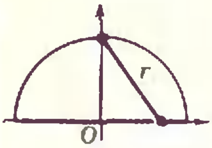


Рис. 5.

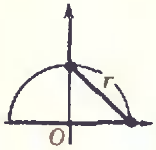


Рис. 6.

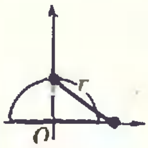


Рис. 7.

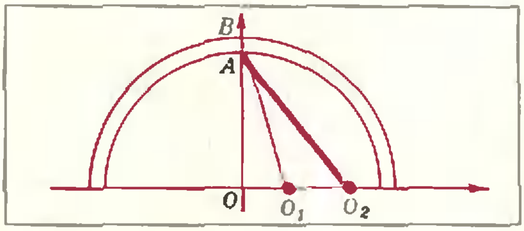


Рис. 8.

Расстояние между любыми двумя (различными) клетками в этом пространстве равно 1 или 2.

На рисунке 2 зеленым цветом показаны шары радиуса 1, имеющиеся в этом пространстве. Вся доска является шаром радиуса 2 с центром в любой клетке (между прочим, ее можно считать и шаром любого радиуса $r>2$!).

Пример 2. Определим расстояние между действительными числами x, y следующим образом (рис. 3):

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{если } x \neq y, \\ 0 & \text{, если } x = y. \end{cases}$$

Легко проверить, что все аксиомы расстояния снова выполняются. В этом пространстве шаром с центром 0 радиуса r является отрезок $[-r; r]$. Для $a\neq 0$ шар с центром a радиуса $r>|a|$ строится так, как показано на рисунке 4. Поэтому для $a\neq 0$ шар с центром a радиуса $r>a\sqrt{2}$ имеет центр внутри себя (рис. 5), при $r=|a|\sqrt{2}$ центр лежит на границе шара (рис. 6), при $|a|<r<|a|\sqrt{2}$ центр лежит вне шара (рис. 7). При $r=|a|$ шар состоит из двух точек: 0 и a; наконец, при $0<r<|a|$ шар состоит только из самой точки a (таким образом, каждая точка $a\neq 0$ «в одиночку» является шаром). В этом пространстве существует «возрастающая» последовательность шаров

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots$$

$(K_{n+1}\neq K_n)$ с убывающей последовательностью радиусов (на рисунке 8 $|O_2B|<|O_1A|$)

$$r_1>r_2>r_3>\ldots$$

М. Ашкалова

Непривычные уравнения

Определим сумму числового множества A с числом b как множество чисел вида $a+b$, где $a\in A$. Аналогично определяются множества $A-b$, $A\cdot b$, $A:b$. Например:

$$\{1, 5, 10\}+3=\{4, 8, 13\},$$
$$\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}:2=\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Теперь мы можем писать «уравнения с множествами», уравнения, в которых «искомыми» значениями переменной являются числовые множества. Например, легко видеть, что множество четных чисел является корнем уравнения

$$X+2=X, \qquad (1)$$

а множество чисел вида $2^p\,(p\in \mathbf{Z})$ — корнем уравнения

$$X\cdot 2=X. \qquad (2)$$

Между прочим, каждое из этих «уравнений первой степени с одной переменной» имеет бесконечное множество корней. Уравнение (1) равносильно уравнению $X-2=X$, а уравнение (2) — уравнению $X:2=X$.

Определим теперь квадрат числового множества следующим образом: $A^2=\{a^2\,|\,a\in A\}$. Теперь можно составлять и решать «квадратные» уравнения. Уравнение

$$X^2=X$$

опять имеет бесконечное множество корней (множество $\{\ldots, \sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, 2, 4, 16, \ldots\}$ — один из его корней), а уравнение

$$X^2+1=X$$

корней не имеет*). (Это легко вывести из того, что если A — его корень и $a\in A$, то $\sqrt{a-1}\in A$.)

(Докладчица сказала, что ей неизвестно, при каких a, b, c уравнение $aX^2+c=X\cdot b$ имеет корни.)

Н. Гоглидзе

*) Если не считать пустого множества. (*Прим. ред.*)

Умножим уравнения

Старшеклассники знают, что уравнение прямой на плоскости имеет вид $y=kx+b$. А можно ли одним уравнением задать две, три прямые?

Пусть уравнение первой прямой $y=k_1x+b_1$, второй $y=k_2x+b_2$. Перенесем в обоих уравнениях все члены в левую часть: $y-k_1x-b_1=0$ и $y-k_2x-b_2=0$. Теперь приравняем произведение левых частей к нулю:

$$(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_2)=0. \quad (1)$$

Ясно, что уравнение (1) будет удовлетворяться, если хотя бы один сомножитель равен нулю. Точки, принадлежащие первой и второй исходным прямым, обращают в нуль то первый, то второй сомножитель. Раскрыв скобки, мы придем к хорошо известному факту, что в частном случае уравнение второй степени может задавать две параллельные или две пересекающиеся прямые.

Подобным же образом можно перемножить три, четыре уравнения. Например, можно умножить уравнения двух окружностей или прямой и окружности:

$$(y-kx-b)((x-a)^2+(y-c)^2-R^2)=0 \quad (2)$$

(здесь a и c — координаты центра окружности, R — ее радиус). Уравнение (2) задает кривую третьего порядка, «распадающуюся» на прямую и окружность. Выбирая соотношения коэффициентов, можно добиться, чтобы эти фигуры касались или пересекались.

Перемножая уравнения других линий, можно образовывать и более сложные сочетания.

Пусть теперь мы имеем некоторое уравнение, задающее линию — простую или состоящую из нескольких компонент. Если немного изменять в уравнении один из коэффициентов, мы будем получать геометрически близкие объекты. Так, изменяя параметр b в уравнении прямой, получаем близкую ей параллельную прямую. Попробуем теперь в уравнении, полученные умножением более простых уравнений, подставлять вместо нуля в правой части небольшие величины — положительные и отрицательные. В итоге мы получим семейства линий, постепенно удаляющихся от исходных (по мере роста абсолютного значения величины в правой части) и расположенных с той или иной «стороны» от них в зависимости от знака добавки.

Если проделать указанную операцию с уравнением (1) двух пересекающихся прямых — получим гиперболы, для которых исходные прямые являются асимптотами.

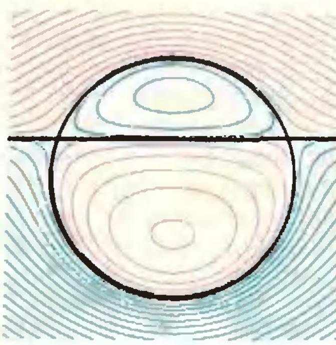


Рис. 1.

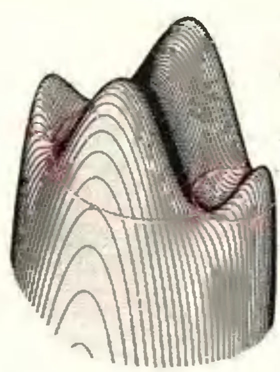


Рис. 2.

Привлекая на помощь машинную графику, построим этим способом кривые, исходя из уравнения (2), задающего пересекающиеся окружность и прямую. На рисунке 1 красным цветом показаны кривые, соответствующие положительным «добавкам», синим цветом — отрицательным. Все они не имеют особых точек.

Из семейства линий на плоскости нетрудно соорудить поверхность в пространстве — стоит только вместо «параметра семейства» (то есть нашей «добавки») ввести третью координату (z). Попробуйте представить себе, какую форму имеет поверхность, построенная с помощью семейства, показанного на рисунке 1!

На рисунке 2 показана поверхность, полученная с помощью перемножения уравнений трех окружностей и подстановки в правую часть координаты ($-z$). На рисунке показаны три эти окружности, располагающиеся, как легко сообразить, в плоскости $z=0$. Линии, получающиеся при сечении этой поверхности плоскостями $z=\text{const}\neq 0$, на рисунке не показаны. Сама же поверхность представлена линиями сечений плоскостями $y=\text{const}$. Любопытно, что в точках, где окружности пересекаются,— поверхность гладкая.

Вместо z в правую часть уравнения можно подставить z^2, $-z^2$, или z^n, $-z^n$. Подумайте, какую форму будет иметь показанная на рисунке 2 поверхность, если в правой части будет z^2.

На четвертой странице обложки показана довольно близкая поверхность, полученная подстановкой в правую часть того же уравнения выражения $A-z^2$, где A — некоторая константа. (На поверхности изображены и видимые, и невидимые части линий пересечения вертикальными плоскостями, но пояса между соседними видимыми участками линий раскрашены). Изменяя A, можно получить несколько иные поверхности — без «дырочек» либо распавшиеся на три отдельные компоненты. Меняется конфигурация поверхности и в зависимости от взаимного положения исходных окружностей.

Близкие вопросы обсуждались в статье «Овал, восьмерка, два овала» («Квант», 1979, № 8).

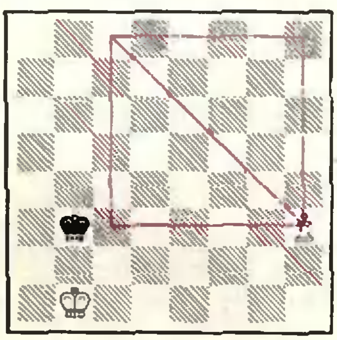
Ю. Котов

Консультирует чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Математика пешечного эндшпиля

Этюды Р. Рети и И. Майзелиса («Квант», 1980, № 1, 3) показывают, что геометрия шахматной доски довольно необычна — кратчайшее расстояние на ней измеряется не обязательно по прямой. На нашей шахматной страничке мы еще не раз будем рассказывать о различных математических идеях, содержащихся в шахматной игре. Сегодня мы рассмотрим несколько простейших правил пешечного эндшпиля.

Правило квадрата. В следующей позиции белый король не принимает участия в игре, и все зависит от того, успеет ли его черный коллега догнать пешку h3.

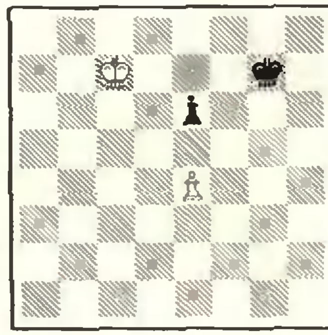


Здесь неопытные шахматисты часто путаются (особенно, если на доске есть еще какие-нибудь пешки), и дело кончается просчетом. Однако исход игры легко оценивается при помощи «правила квадрата». Достаточно посмотреть, попадает ли король при своем ходе в «квадрат» пешки. Для удобства можно мысленно провести всего одну линию — диагональ квадрата (h3—c8). В нашей позиции черные при своем ходе делают ничью (попадают в квадрат), а при ходе противника проигрывают.

Метод треугольника. В следующей позиции черные при своем ходе сразу проигрывают, так как пропускают белого короля на поле b6 и теряют пешку a6.

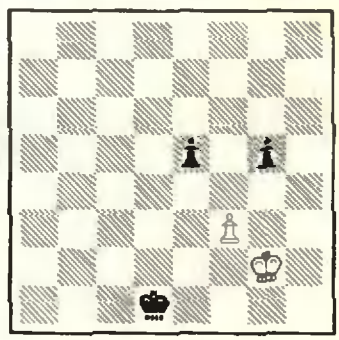
Но как белым передать очередь хода противнику или, пользуясь шахматным языком, выиграть темп? После 1.Крd5 Крc8 ничего не дает 2.Крd6 Крd8 3.c7+ Крc8 4.Крc6 — пат!, а 2.Крc5 Крc7 приводит к исходной позиции. Выигрыш темпа достигается при помощи «метода треугольника». Для данного примера этот треугольник (c4—d4—d5) изображен на рисунке. После **1. Крd5 Крc8 2. Крd4 Крb8 3. Крc4! Крc8 4. Крd5** белые достигают цели, так как на 4...Крd8 уже выигрывает 5. Крd6, а на 4...Крc7 — 5. Крc5.

Геометрическая оппозиция. Оппозиция (иначе — противостояние) играет основную роль при разыгрывании пешечных эндшпилей. Геометрическая оппозиция означает, что белый и черный короли находятся на одной линии и их разделяет нечетное число полей. Если одно, то оппозицию называют ближней, если три или пять, то дальней. Если короли стоят на одной горизонтали (вертикали), то оппозиция горизонтальная (вертикальная). Сторона, после хода которой возникла оппозиция, имеет определенное преимущество (говорят, что она «владеет оппозицией»). Решающую роль здесь играют маневры королей и пешек. В следующей позиции при своем ходе белые выигрывают, при ходе черных — ничья. Результат зависит от того, кто займет



оппозицию. Пусть ход черных: **1...e5! 2.Крc6 Крg6!** (черные держат горизонтальную оппозицию) **3.Крd5 Крf7** (а это так называемая диагональная оппозиция) **4. Кр:e5 Крe7** (вертикальная оппозиция) **5. Крf5 Крf7 6. e5 Крe7 7.e6 Крe8!** (после 7...Крf8 8.Крf6 Крe8 9.e7 белые выигрывают) **8.Крf6 Крf8!**(вновь вертикальная оппозиция) **9.e7+ Крe8 10.Крe6** пат.

При ходе белых решает **1.e5! Крf8 2.Крd8! Крf7 3.Крd7 Крf8 4.Кр:e6 Крe8** (черные заняли оппозицию, но это уже не спасает: белый король прорвался на шестую горизонталь) **5.Крd6 Крd8 6.e6 Крe8 7.e7 Крf7 8.Крd7**, и пешка проходит в ферзи.



В этой позиции белые надеются на ничью. Однако в случае ближней оппозиции им помешала бы собственная пешка: 1.Крf1? Крd2 2.Крf2 Крd3!, и оппозиция теряется — 3.Крg3 Крe3 4.Крg2 Крe2 5.Крg3 Крf1 6.Крh3 Крf2 7. Крg4 Крg2 с выигрышем.

Партию спасает только дальняя оппозиция: **1.Крh1! Крc2** (после 1...g4 2.Крg2 Крd2 3.fg e4 4.g5 пешки превращаются одновременно) **2.Крg2 Крd2 3.Крh2! Крc2 4.Крg2 Крe3 5.Крg3** с ничьей.

«Квант» для младших школьников

(«см. «Квант» № 9)

1. Перейдем к «безномерным» обозначениям: $a_1=a$, $a_2=b$, $a_3=c$, $a_4=d$, $a_5=e$. Начнем выписывать наши числа, учитывая, что $a^2=b^2=c^2=d^2=e^2=1$:
$a, b, c, d, e, ab, bc, cd, de, eab, ac, bd, ce, abd, bce, abcd, bcde, abcde, acde, ade, ae, a, b, c, d, e, \ldots$
Мы видим, что, начиная с a_{22}, числа повторяются, то есть *период* равен 21. Поскольку 1980 при делении на 21 дает в остатке 6, $a_{1980}=a_6=ab=-1$.

Дни недели	Числа				
	1	8	15	22	29
	2	9	16	23	30
	3	10	17	24	31
	4	11	18	25	
	5	12	19	26	
	6	13	20	27	
	7	14	21	28	

Рис. 1.

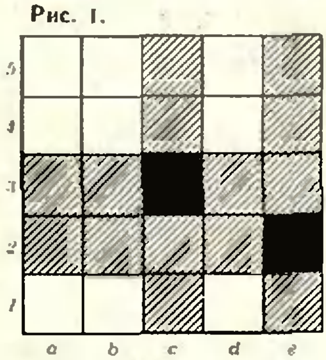


Рис. 2.

2. Саше надо посоветовать прекратить решать задачу, так как искомая раскладка карточек невозможна.
Если бы она была возможна, то карточка $\boxed{5}$ должна была бы занимать крайнее верхнее (или нижнее) положение и касаться только карточек $\boxed{1}$ и $\boxed{9}$. Тогда в центре нельзя положить ни одну из оставшихся карточек, поскольку для каждой из них остается не более пяти кандидатов в соседи (запрещены ее «старые» соседи — их 3 или 4 — и она сама), в то время как центральная карточка должна иметь шесть соседей.

3. В январе 31 день. «Календарь января» можно представить в таком виде, как на рисунке 1. Согласно условию как «понедельник», так и «пятница» должны стоять в четырех нижних строчках столбца «Дни недели». Ставя по очереди «понедельник» в каждую из этих строчек, увидим, что он может стоять только в нижней строчке. Значит, в первой строчке стоит «вторник».

4. После первого вычеркивания остаются цифры, стоящие в заданном числе на четных местах, после второго — стоящие на местах, кратных четырем; после третьего — на местах, кратных восьми, и т. д. Самая большая степень двойки, не превышающая сотни,— 64. Поэтому последней будет вычеркнута цифра, стоящая в заданном числе на 64-м месте, то есть 4.

5. Докажем, что требуемую раскраску осуществить невозможно. Допустим противное и рассмотрим клетку c3 (см. рис. 2) — пусть она будет красная. Возьмем любую клетку, на которую можно попасть с поля c3 ходом коня, например клетку e2; тогда e2 по условию — тоже красная. Заштрихуем остальные клетки двух столбцов и двух строк, в которых расположены клетки c2 и e2. Очевидно, заштрихованные клетки уже не могут быть красными.
Одна из незаштрихованных клеток строки 1 должна быть красного цвета. В строку 1 можно попасть только из строк 2, 3. Из e2 попасть в строку 1 уже нельзя. Значит, путь по красным клеткам в строку 1 идет из c3. Следовательно, красной должна быть одна из клеток b1, d1. Если красная — b1, то в столбце a красной может быть только клетка a4 (в клетку a5 ходом коня можно попасть только с заштрихованных, то есть некрасных клеток). Теперь в строке 5 красной может быть только клетка d5, но тогда обойти красные клетки, побывав на каждой по разу, невозможно.
Случай d1 разберите сами.

Номер готовили:
А. Виленкин, А. Егоров, Н. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Т. Кольченко, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова, Н. Вершинина

Корректор В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16. «Квант», тел. 231-83-62

Сдано в набор 14.08.80

Подписано в печать 25.09.80

Печать офсетная

Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,33. Т-17807

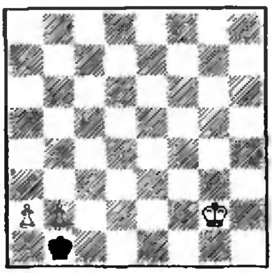
Цена 30 коп. Заказ 2007

Тираж 260 586 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли

шахматный конкурс „Кванта“

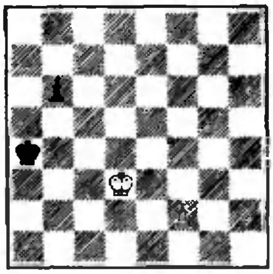
Это выражение, принадлежащее великому французскому шахматисту XVIII века Франсуа Филидору, как нельзя лучше подходит для заголовка сегодняшнего тура — в предлагаемых позициях участвуют только пешки и короли. Расскажем прежде всего об одном забавном эпизоде, который произошел с известным шахматным мастером и композитором Н. Григорьевым в дни его юности (1913 год). Как-то в шахматном клубе он играл партию с одним старичком. Юноша очень волновался, полагая, что перед ним сидит маститый шахматист. Однако дела шли неплохо, и в конце концов на доске возникло примерно такое положение:



Старичок дрожащей рукой снял с доски пешку «b» — **1...Кр:b2**, но зато другая пешка двинулась вперед — **2. a4**. Противник ринулся за ней — 2...Кра3. Юного шахматиста взяло сомнение: а вдруг старичок знает секрет и преследует пешку не зря? Однако терять было нечего, и гонка продолжалась: **3. a5 Кра4 4. a6 Кра5** (черный король ни на шаг не отставал от пешки) **5. a7 Кра6**. Здесь белые с возгласом «Ферзь!» сделали последний ход пешкой **6. a8Ф**. Лицо старого человека выразило скорбь. «Эх, не успел!!» — выдохнул он в отчаянии. Старик верил в свое счастье, но внезапное появление ферзя разбило все его надежды. Вот к какой драме может привести незнание в пешечном эндшпиле правила квадрата!

А Николай Григорьев впоследствии стал одним из крупнейших специалистов в мире в области пешечных окончаний. В 1936 году он послал 10 пешечных этюдов на международный конкурс во Франции и завоевал десять призов!

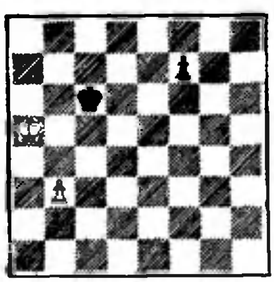
Вот один этюд Григорьева, опубликованный им в 1928 году:



Белые начинают и выигрывают

Идея этого этюда в том, что при одновременном превращении пешек белым удается заматовать короля противника: **1. Крd4! b5 2. f4 b4 3. f5 b3 4. Крc3 Кра3 5. f6 b2 6. f7 b1Ф 7. f8Ф+ Кра2** (7...Кра4 8. Фа8+ Крb5 9. Фb8+) **8. Фа8х**; 1...Крb5 2. Крd5! Кра6 (2...Кра4 3. f4 b5 4. f5 b4 5. Крc4 b3 6. Крc3 Кра3 7. f6 приводит к основному варианту) 3. f4! Крb7 4. f5 Крc7 5. Крe6! Крd8 6. Крf7 b5 7. f6 b4 8. Крg7 b3 9. f7 b2 10. f8Ф+.

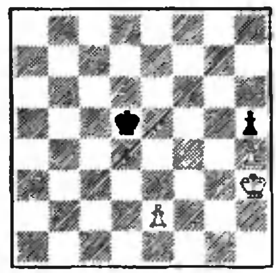
Окончания «пешка против пешки» содержит немало хитростей, и даже гроссмейстеры иногда ошибаются в них.



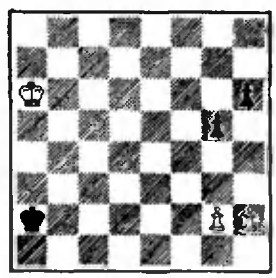
Любоевич — Браун

Эта позиция возникла на международном турнире в Амстердаме в 1972 году. После **39...f5? 40. Крb4** последовало соглашение на ничью, которую оба гроссмейстера считали закономерным исходом. Однако это положение является почти «зеркальным» отражением только что рассмотренного этюда лишь с переменой цветов! После 39...Крd5!, как мы знаем, черные выигрывали партию.

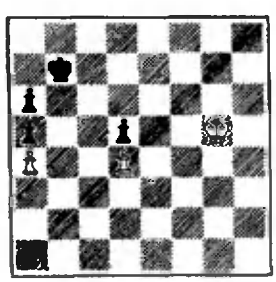
Предлагаем вам самостоятельно решить три этюда. Любопытно, что этюд № 3 получился у экс-чемпиона мира во время анализа турнирной партии.



1. Белые начинают и выигрывают.



2. Н. Григорьев. 1936 г. Белые начинают и выигрывают.



3. М. Ботвинник, 1939 г. Белые начинают и выигрывают.

шахматный конкурс „Кванта“

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Эту замысловатую поверхность шестого порядка нарисовала машина ЕС-1022 по программе Ю. Котова. Геометрически поверхность весьма своеобразна: она замкнута, но имеет две дырки — топологи такие поверхности называют «кренделями». А алгебраическим геометрам она интересна в частности тем, что содержит шесть окружностей — они выделены красным цветом. Аналитически поверхность получена из... трех окружностей с помощью простого приема: подробно об этом вы можете прочитать на с. 62.